Programação Linear

Cap 6 Programação Inteira

Prof Clayton J A Silva

Da divisibilidade às decisões inteiras

Programação Linear

Admite valores fracionários para as variáveis.

Adequada para quantidades divisíveis, como toneladas, litros e horas de operação.

Programação Inteira

Exige valores inteiros para algumas ou todas as variáveis – **restrição de integralidade**.

Necessária para decisões sobre unidades indivisíveis, como caminhões e máquinas.

3,6 caminhões ou 2,33 máquinas exigem rever o domínio das variáveis.

A função objetivo e as restrições permanecem lineares.
Muda o **domínio** das variáveis e o **conjunto de soluções admissíveis**.

O ótimo contínuo pode ser inadmissível. O Simplex, isoladamente, não assegura uma solução inteira.

PI pura, mista e binária

PI pura

Todas as variáveis de decisão são inteiras.

Quantidades de máquinas de dois tipos.

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \geq 0$

PI mista

Combina variáveis inteiras e contínuas.

Número de caminhões n e carga q, em toneladas.

$n \in \mathbb{Z} \geq 0, q \geq 0$
$q \leq Cn$

PI binária

As variáveis assumem somente 0 ou 1.

Abrir uma instalação: y = 1.
Não abrir: y = 0.

$y \in \{0, 1\}$

C é a capacidade de cada caminhão. A PI binária é um caso particular da Programação Inteira.

Estrutura matemática e formulação

Modelo geral

Maximizar $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m$$
$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n$$
$$x_j \in \mathbb{Z} \quad j \in I$$

c_j: contribuição ao objetivo
a_{ij}: consumo ou relação técnica
b_i: limite da restrição
I: índices das variáveis inteiras

Roteiro de formulação

1. Descrever a decisão, o horizonte e as unidades.
2. Definir as variáveis e seu significado.
3. Construir a função objetivo com unidades consistentes.
4. Traduzir recursos, demandas e relações lógicas em restrições.
5. Especificar os domínios: contínuo, inteiro não negativo ou binário.
6. Validar o modelo e interpretar a solução.

PI pura: todas as variáveis inteiras. PI mista: apenas parte delas. Restrições também podem usar = ou ≥.

Modelagem: planejamento da produção

Uma empresa produz equipamentos A e B em unidades indivisíveis. Cada unidade utiliza dois recursos limitados. O objetivo é maximizar o lucro do período.

Informação	A	B	Disponibilidade
Recurso 1	2	1	7
Recurso 2	1	2	7
Lucro unitário (R$)	5	4	—

x_1: quantidade de equipamentos A
x_2: quantidade de equipamentos B

Modelo matemático

Maximizar $Z = 5x_1 + 4x_2$

Sujeito a:
$2x_1 + x_2 \leq 7$
$x_1 + 2x_2 \leq 7$
$x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \geq 0$

PI pura: as duas variáveis são inteiras não negativas. Valores didáticos.

Relaxação da integralidade e limites

Retiramos temporariamente a exigência de integralidade e mantemos as demais restrições. Podemos então aplicar o método gráfico ou o Simplex.

Solução do exemplo de produção

$2x_1 + x_2 = 7$
$x_1 + 2x_2 = 7$

Subtraindo: $x_1 = x_2$
Substituindo: $3x_1 = 7$

$x_1 = x_2 = 7/3 \approx 2{,}3333$
ZLP = 5(7/3) + 4(7/3) = 21

O papel dos limites

Na maximização:

Ótimo da relaxação
Limite superior do ótimo inteiro

Solução inteira viável
Limite inferior do ótimo inteiro

Na minimização, os sentidos se invertem.

O lucro contínuo máximo é 21, mas a solução fracionária não é admissível para equipamentos indivisíveis.

Por que não basta arredondar?

Arredondar (7/3, 7/3) para (2, 2) produz lucro 18.
A combinação inteira (3, 1) respeita os recursos e gera lucro 19.

Alternativa	x_1	x_2	Z	Situação
Relaxação	7/3	7/3	21	Ótima contínua, não inteira
Arredondamento	2	2	18	Viável, mas não ótima
Candidata inteira	3	1	19	Viável e melhor que (2, 2)
Arredondar para cima	3	3	27	Inviável: consumos 9 > 7

Arredondar pode reduzir o resultado ou violar restrições.

Arredondar para baixo também pode ser inviável em modelos com igualdades ou demandas mínimas.
A otimalidade de (3, 1) será comprovada pelo Ramificação e Limite (*Branch and Bound*).

Branch and Bound: ramificação e limites

O método combina relaxações lineares e uma busca organizada em subproblemas para encontrar e comprovar a melhor solução inteira.

Solução incumbente: melhor solução inteira viável encontrada até o momento. Ela pode ser substituída se encontrarmos outra melhor.

Ramificação (*Branch*)

Divide as possibilidades inteiras em subproblemas.

Limites (*Bound*)

Usa os resultados das relaxações para descartar regiões que não podem melhorar a solução conhecida.

1. Separar as possibilidades inteiras

Relaxação original: $x_1 = x_2 = 7/3 \approx 2{,}33$ e $Z = 21$.
A solução é fracionária. **Precisamos ramificar**.

Como x_1 precisa ser inteiro, criamos dois ramos:

Ramo A	**Ramo B**
Acrescentar **$x_1 \leq 2$**	Acrescentar **$x_1 \geq 3$**
Inteiros possíveis: 0, 1, 2	Inteiros possíveis: 3, 4, ...

Cada ramo mantém as restrições originais e a função objetivo.
Resolvemos sua relaxação novamente, permitindo valores fracionários.

2. Ramo A: por que (2; 2,5)?

Em A, $x_1 \leq 2$. Na fronteira $x_1 = 2$, substituímos nas duas restrições:

Restrição	Substituir $x_1 = 2$	Limite para x_2
$2x_1 + x_2 \leq 7$	$4 + x_2 \leq 7$	$x_2 \leq 3$
$x_1 + 2x_2 \leq 7$	$2 + 2x_2 \leq 7$	$x_2 \leq 2,5$

As duas condições precisam valer: **$x_2 \leq$ mín(3; 2,5) = 2,5**.

Melhor ponto de A: (2; 2,5). Lucro: 5(2) + 4(2,5) = 20.

Conferência: os lucros nos vértices de A são 0, 10, 14 e 20.
O máximo é 20, mas x_2 ainda é fracionário.

3. Ramo B: por que (3; 1)?

Em B, $x_1 \geq 3$. Na fronteira $x_1 = 3$, substituímos nas duas restrições:

Restrição	Substituir $x_1 = 3$	Limite para x_2
$2x_1 + x_2 \leq 7$	$6 + x_2 \leq 7$	$x_2 \leq 1$
$x_1 + 2x_2 \leq 7$	$3 + 2x_2 \leq 7$	$x_2 \leq 2$

As duas condições precisam valer: **$x_2 \leq$ mín(1; 2) = 1**.

Melhor ponto de B: (3; 1). Lucro: 5(3) + 4(1) = 19.

Os vértices de B geram lucros 15, 17,5 e 19. A solução ótima é inteira.
Encerramos B e guardamos 19 como a melhor solução inteira conhecida.

4. Por que continuar investigando A?

Ramo	Melhor solução relaxada	Lucro	Situação
A	(2; 2,5)	20	Fracionária
B	(3; 1)	19	Inteira

A ainda pode melhorar a **solução incumbente**: seu limite superior é 20, enquanto o melhor lucro inteiro conhecido é 19.

Como $x_2 = 2,5$, dividimos A novamente:

A1: acrescentar $x_2 \leq 2$. A2: acrescentar $x_2 \geq 3$.

Os dois filhos herdam $x_1 \leq 2$ e todas as restrições originais.

5. Calcular os resultados de A1 e A2

A1: $x_1 \leq 2$ e $x_2 \leq 2$

Na fronteira $x_2 = 2$:

$2x_1 + 2 \leq 7$ dá $x_1 \leq 2{,}5$
$x_1 + 2(2) \leq 7$ dá $x_1 \leq 3$
Condição herdada: $x_1 \leq 2$

$x_1 \leq$ mín(2,5; 3; 2) = 2
Melhor ponto: (2; 2)

$Z = 5(2) + 4(2) = 18$

A2: $x_1 \leq 2$ e $x_2 \geq 3$

Na fronteira $x_2 = 3$:

$2x_1 + 3 \leq 7$ dá $x_1 \leq 2$
$x_1 + 2(3) \leq 7$ dá $x_1 \leq 1$
Condição herdada: $x_1 \leq 2$

$x_1 \leq$ mín(2; 1; 2) = 1
Melhor ponto: (1; 3)

$Z = 5(1) + 4(3) = 17$

Os dois ótimos são inteiros e não superam o lucro 19 já encontrado.
Encerramos A1 e A2 e mantemos (3; 1) como melhor solução.

6. Comparação final e decisão ótima

Ramo final	Melhor solução	Lucro
B	(3; 1)	19
A1	(2; 2)	18
A2	(1; 3)	17

Todos os ramos estão encerrados. O ótimo inteiro está comprovado.

$x_1 = 3$, $x_2 = 1$ e Zmáx = R$ 19

Produzir 3 equipamentos A e 1 B.
Recurso 1: consumo 7, folga 0. Recurso 2: consumo 5, folga 2.

Quando encerrar um nó?

Inviabilidade	A relaxação não possui solução viável.
Integralidade	O ótimo da relaxação atende à integralidade. Atualizar a incumbente se houver melhora.
Limite	Na maximização, o limite superior do nó é menor ou igual ao valor da incumbente. O nó não pode melhorá-la.

No exemplo, todos os nós finais foram encerrados por integralidade.

$x_1 = 3$, $x_2 = 1$ e $Z^* =$ R$ 19

Folgas: recurso 1 = 0 e recurso 2 = 2. Diferença para a relaxação: 21 − 19 = 2.
Sem nós em aberto, o ótimo está comprovado. A ordem de exploração pode variar.

1. Modelar a contratação dos veículos

Transportar pelo menos 18 pessoas em uma viagem, com o menor custo.
Há veículos suficientes dos dois tipos. Lugares vazios são permitidos.

Informação	Van	Micro-ônibus
Lugares	4	7
Custo (R$)	40	65

Minimizar $C = 40x_1 + 65x_2$

$4x_1 + 7x_2 \geq 18$
x_1, x_2 inteiros e ≥ 0

x_1 = quantidade de vans. x_2 = quantidade de micro-ônibus.
A capacidade dos dois tipos se soma para atender às 18 pessoas.

2. Resolver a relaxação linear

Permitimos temporariamente frações de veículos.
Mantemos a capacidade mínima e a não negatividade.

Van: custo por lugar

40 ÷ 4 = R$ 10,00

Micro-ônibus: custo por lugar

65 ÷ 7 ≈ R$ 9,29

O micro-ônibus é mais barato por lugar. Usamos apenas esse tipo:

$x_1 = 0$ e $x_2 = 18/7 \approx 2{,}5714$

Custo mínimo contínuo = 65 × 18/7 ≈ R$ 167,14

3. Por que não basta arredondar?

A solução contínua pede 2,5714 micro-ônibus.
Precisamos contratar veículos inteiros e verificar os lugares disponíveis.

Alternativa	Vans	Micro	Lugares	Custo (R$)	Situação
Relaxação	0	18/7	18	167,14	Fracionária
Arredondar para baixo	0	2	14	130,00	Inviável
Inteiro mais próximo	0	3	21	195,00	Inteira viável

Dois micro-ônibus deixam 4 pessoas sem lugar.
Três atendem ao grupo, mas ainda precisamos procurar uma opção mais barata.

4. Ramificar a variável fracionária

Na raiz: $x_1 = 0$ e $x_2 = 2{,}5714$. Escolhemos x_2 para ramificar.

Ramo A	Ramo B
Acrescentar $x_2 \leq 2$	Acrescentar $x_2 \geq 3$
Até 2 micro-ônibus no problema inteiro	3 ou mais micro-ônibus no problema inteiro

Os dois ramos mantêm $4x_1 + 7x_2 \geq 18$ e $x_1, x_2 \geq 0$.
Resolvemos a relaxação de cada ramo novamente.

Nenhuma possibilidade inteira de x_2 se perde com essa divisão.

5. Ramo A: até dois micro-ônibus

O micro-ônibus custa menos por lugar. Na fronteira $x_2 = 2$:

$$4x_1 + 7(2) \geq 18$$
$$4x_1 + 14 \geq 18$$
$$4x_1 \geq 4$$
$$x_1 \geq 1$$

Como a van aumenta o custo, escolhemos o menor valor: $x_1 = 1$.

Solução: $(x_1; x_2) = (1; 2)$

$C = 40(1) + 65(2) = R\$\ 170$

É inteira e viável: guardamos como melhor contratação encontrada.
Em A, o menor custo para cada x_2 é $180 - 5x_2$, que diminui até $x_2 = 2$.

6. Ramo B: três ou mais micro-ônibus

Na fronteira $x_2 = 3$, substituímos na capacidade mínima:

$$4x_1 + 7(3) \geq 18$$
$$4x_1 + 21 \geq 18$$
$$4x_1 \geq -3$$
$$x_1 \geq -0{,}75$$

Também precisamos de $x_1 \geq 0$.
Logo, $x_1 \geq \text{máx}(-0{,}75; 0) = 0$.

O menor custo usa $x_1 = 0$.

$C = 40(0) + 65(3) = R\$\ 195$

Três micro-ônibus já oferecem 21 lugares. Mais veículos aumentam o custo.
Encerramos B: seu ótimo é inteiro e custa mais que os R$ 170 do ramo A.

7. Comparar os ramos e concluir

Ramo	Vans (x_1)	Micro (x_2)	Lugares	Custo (R$)
A	1	2	18	170,00
B	0	3	21	195,00

Ambos os ramos estão encerrados. O custo mínimo inteiro é R$ 170.

Decisão: contratar 1 van e 2 micro-ônibus.
São 4 + 14 = 18 lugares, sem sobra.

A relaxação forneceu o piso R$ 167,14. A contratação viável de R$ 170 forneceu um teto. A análise dos ramos comprovou o ótimo R$ 170.
Economia em relação ao arredondamento: R$ 195 − R$ 170 = R$ 25.

PROGRAMAÇÃO INTEIRA BINÁRIA

Decisões do tipo sim ou não

Cada variável representa uma escolha: 1 = realizar e 0 = não realizar.

Exemplo: dois investimentos

Orçamento disponível: R$ 6 mil

Investimento	Custo[1]	Benefício[1]
A (y_1)	4	7
B (y_2)	3	5

[1] Valores em R$ mil. Dados didáticos.

Modelo binário

Maximizar $Z = 7y_1 + 5y_2$

$4y_1 + 3y_2 \leq 6$

$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$

O orçamento soma os custos das alternativas escolhidas.

Escolher A: $(y_1; y_2) = (1; 0)$, benefício 7 e gasto 4. A + B custaria 7, acima do orçamento.

DECISÕES DO TIPO SIM OU NÃO

Escolha de investimentos: formulação

1. Representar as decisões

$y_1 = 1$ se A for realizado, 0 caso contrário.
$y_2 = 1$ se B for realizado, 0 caso contrário.

As variáveis indicam escolhas.
Cada investimento é realizado por inteiro.

2. Identificar os coeficientes

Investimento	Custo	Benefício
A	4	7
B	3	5

Valores em R$ mil. Orçamento: 6.

Maximizar $Z = 7y_1 + 5y_2$

$4y_1 + 3y_2 \leq 6$ e $y_1, y_2 \in \{0, 1\}$

7 e 5 medem os benefícios. 4 e 3 são os custos.
Multiplicar por 1 inclui o investimento. Multiplicar por 0 o exclui.

DECISÕES DO TIPO SIM OU NÃO

Escolha de investimentos: combinações

Duas variáveis binárias geram $2^2 = 4$ combinações. Orçamento: R$ 6 mil.
Gasto = $4y_1 + 3y_2$. Benefício = $7y_1 + 5y_2$. Valores em R$ mil.

$(y_1; y_2)$	Escolha	Gasto	Benefício	Situação
(0; 0)	Nenhum	0	0	Viável
(1; 0)	**Somente A**	**4**	**7**	**Viável e ótima**
(0; 1)	Somente B	3	5	Viável
(1; 1)	A e B	7	12	Inviável: 7 > 6

Escolher somente A: benefício R$ 7 mil, gasto R$ 4 mil e sobra R$ 2 mil.

Primeiro, verificar a viabilidade. Depois, comparar os benefícios das combinações permitidas.