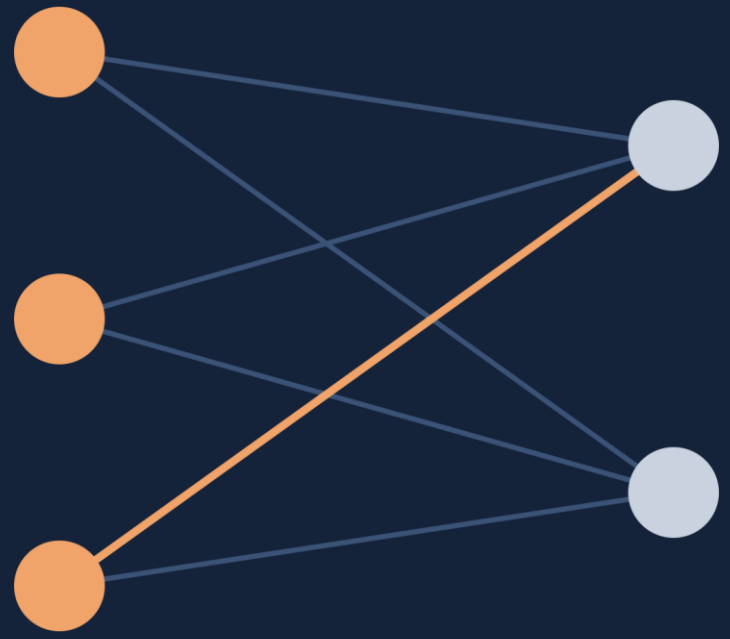
PROGRAMAÇÃO LINEAR APLICADA · CAPÍTULO 5

Problema de Transporte

Da distribuição simples à otimização de rotas



Prof. Clayton J A Silva · Ibmec RJ · Ciência de Dados

ROTEIRO DA AULA

Quatro etapas

01

Exemplo 1

Dois depósitos e dois centros: modelo e solução na planilha

02

Exemplo 2

Três depósitos e as etapas da solução

03

Generalização

Enunciado, elementos da rede e formulação

04

Algoritmos

Canto Noroeste, ciclo fechado e Stepping Stone

PARTE 1 · INTRODUÇÃO

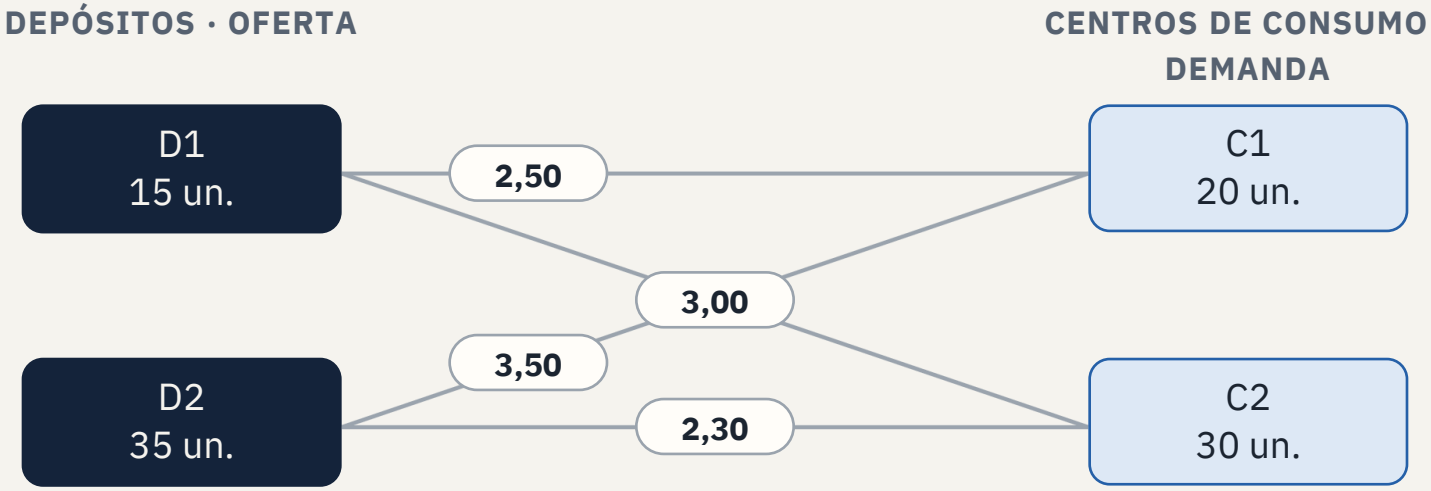
Exemplo 1

Duas origens, dois destinos: do enunciado ao modelo e à solução na planilha.

EXEMPLO INTRODUTÓRIO 1

Dois depósitos e dois centros de consumo

Os depósitos D1 e D2 disponibilizam, respectivamente, 15 e 35 unidades de um produto. Os centros de consumo C1 e C2 demandam 20 e 30 unidades. O custo unitário de cada rota está indicado na rede. Quanto transportar em cada rota para atender à demanda com o menor custo total?



EXEMPLO INTRODUTÓRIO 1

Modelo de programação linear

Variáveis de decisão

x_{ij} = quantidade transportada do depósito D_i ao centro C_j, com i = 1, 2 e j = 1, 2.

Equilíbrio

Oferta total: 15 + 35 = 50

Demanda total: 20 + 30 = 50

Por isso todas as restrições são igualdades.

Minimizar

$$Z = 2{,}50x_{11} + 3{,}00x_{12} + 3{,}50x_{21} + 2{,}30x_{22}$$

sujeito a

$x_{11} + x_{12} = 15$	oferta de D1
$x_{21} + x_{22} = 35$	oferta de D2
$x_{11} + x_{21} = 20$	demanda de C1
$x_{12} + x_{22} = 30$	demanda de C2
$x_{ij} \geq 0$	não negatividade

EXEMPLO 1 · SOLUÇÃO NA PLANILHA

O modelo organizado na planilha

	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	Resultado		Limite
Quantidades	15	0	5	30			
Custos unitários	2,50	3,00	3,50	2,30	Z = 124,00		
Oferta D1	1	1	0	0	15	=	15
Oferta D2	0	0	1	1	35	=	35
Demanda C1	1	0	1	0	20	=	20
Demanda C2	0	1	0	1	30	=	30

Como a planilha calcula

Z = SOMARPRODUTO(custos; quantidades)

Cada restrição: SOMARPRODUTO(coeficientes; quantidades), comparado ao limite.

Custo total

124,00

EXEMPLO 1 · SOLUÇÃO NA PLANILHA

Uma distribuição viável

	C1	C2	Oferta
D1	2,50 **15**	3,00 **0**	15
D2	3,50 **5**	2,30 **30**	35
Dem.	20	30	**50**

Conferência das restrições

Linhas: 15 + 0 = 15 · 5 + 30 = 35

Colunas: 15 + 5 = 20 · 0 + 30 = 30

Custo total

Z = 15×2,50 + 0×3,00 + 5×3,50 + 30×2,30

Z = 124,00

Três rotas são utilizadas; a rota D1 → C2 fica sem fluxo.

EXEMPLO 1 · SOLUÇÃO NA PLANILHA

E se usarmos a rota D1 → C2?

Distribuição atual · **Z = 124,00**

	C1	C2	Oferta	
D1	2,50 **15**	3,00 **0**	15	D2
D2	3,50 **5**	2,30 **30**	35	Dem.
Dem.	20	30	**50**	

1 unidade por D1 → C2 · **Z = 125,70**

	C1	C2	Oferta	
D1	−1 2,50 **14**	+1 3,00 **1**	15	D2
D2	+1 3,50 **6**	−1 2,30 **29**	35	Dem.
Dem.	20	30	**50**	

Para manter ofertas e demandas, cada unidade enviada por D1 → C2 exige ajustes em x_{11}, x_{21} e x_{22}: **+3,00 − 2,50 + 3,50 − 2,30 = +1,70** por unidade. O custo aumenta; logo, a distribuição com **Z = 124,00** é a de menor custo.

PARTE 1 · INTRODUÇÃO

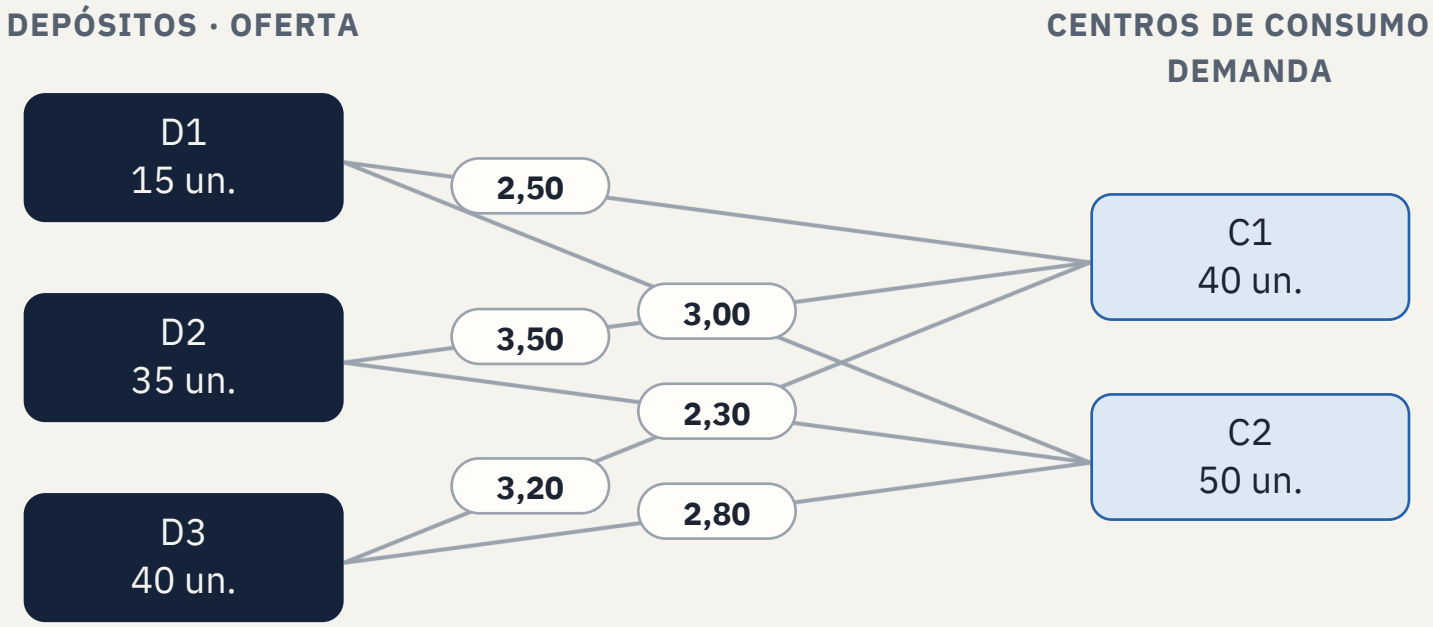
Exemplo 2

Três depósitos e dois centros: a solução construída em etapas.

EXEMPLO INTRODUTÓRIO 2

Três depósitos e dois centros de consumo

Acrescenta-se o depósito D3, com capacidade de 40 unidades, e custos de 3,20 (para C1) e 2,80 (para C2). As demandas passam a 40 unidades em C1 e 50 em C2, preservando o equilíbrio: 15 + 35 + 40 = 90 = 40 + 50.



EXEMPLO INTRODUTÓRIO 2

Modelo de programação linear

Variáveis de decisão

x_{ij} = quantidade de D_i para C_j, com i = 1, 2, 3 e j = 1, 2: seis variáveis.

Restrições

Três de oferta e duas de demanda: cinco igualdades.

Agora a solução será construída em etapas.

Minimizar

$$Z = 2{,}5x_{11} + 3x_{12} + 3{,}5x_{21} + 2{,}3x_{22} + 3{,}2x_{31} + 2{,}8x_{32}$$

sujeito a

$x_{11} + x_{12} = 15$	oferta de D1
$x_{21} + x_{22} = 35$	oferta de D2
$x_{31} + x_{32} = 40$	oferta de D3
$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40$	demanda de C1
$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50$	demanda de C2
$x_{ij} \geq 0$	não negatividade

EXEMPLO 2 · ETAPAS DA SOLUÇÃO

Três passos, repetidos até a otimalidade

PASSO 1

Solução básica inicial

Método do Canto Noroeste: alocações a partir da célula superior esquerda.

PASSO 2

Teste de otimalidade

Stepping Stone: avalia cada rota não básica e decide a variável que entra na base.

PASSO 3

Variável que sai da base

Aumenta-se o fluxo da que entra até uma variável básica se anular.

Com a nova solução, volta-se ao passo 2, até que nenhuma rota não básica reduza o custo.

PASSO 1 · SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Método do Canto Noroeste

C1	C2	Oferta	D1
1º 2,50 **15**	3,00 **0**	15	**D2**
2º 3,50 **25**	3º 2,30 **10**	35	**D3**
3,20 **0**	4º 2,80 **40**	40	**Dem.**
40	50	**90**	

1º x_{11} = mín(15; 40) = 15 → D1 esgotado

2º x_{21} = mín(35; 25) = 25 → C1 atendido

3º x_{22} = mín(10; 50) = 10 → D2 esgotado

4º x_{32} = mín(40; 40) = 40 → tudo atendido

$Z_0 = 15 \times 2{,}50 + 25 \times 3{,}50 + 10 \times 2{,}30 + 40 \times 2{,}80$

$Z_0 = 260{,}00$

Básicas: x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{32} ($m + n - 1 = 4$). Não básicas: x_{12} e x_{31}.

PASSO 2 · TESTE DE OTIMALIDADE (STEPPING STONE)

Avaliando a rota não básica x_{12}

C1	C2	Oferta	D1
−1 · 2,50 · **14**	+1 · 3,00 · **1**	15	**D2**
+1 · 3,50 · **26**	−1 · 2,30 · **9**	35	**D3**
3,20 · **0**	2,80 · **40**	40	**Dem.**
40	50	**90**	

Ciclo fechado

x_{12} (+) → x_{11} (−) → x_{21} (+) → x_{22} (−) → x_{12}

Variação unitária

$\Delta Z_{12} = +3{,}00 - 2{,}50 + 3{,}50 - 2{,}30 = +1{,}70$

Na planilha: Z = 260,00 → 261,70

$\Delta Z_{12} > 0$: o custo aumenta; x_{12} não entra na base.

PASSO 2 · TESTE DE OTIMALIDADE (STEPPING STONE)

Avaliando a rota não básica x_{31}

C1	C2	Oferta	D1
2,50 **15**	3,00 **0**	15	**D2**
−1 3,50 **24**	+1 2,30 **11**	35	**D3**
+1 3,20 **1**	−1 2,80 **39**	40	**Dem.**
40	50	**90**	

Ciclo fechado

x_{31} (+) → x_{21} (−) → x_{22} (+) → x_{32} (−) → x_{31}

Variação unitária

$\Delta Z_{31} = +3{,}20 - 3{,}50 + 2{,}30 - 2{,}80 = -0{,}80$

Na planilha: Z = 260,00 → 259,20

$\Delta Z_{31} < 0$: o custo diminui; x_{31} é candidata a entrar.

PASSO 2 · DECISÃO

Qual variável entra na base?

ROTA D1 → C2

$$\Delta Z_{12} = +1{,}70$$

Aumenta o custo · não entra

ROTA D3 → C1

$$\Delta Z_{31} = -0{,}80$$

Reduz o custo · entra na base

Regra (minimização): entra na base a variável não básica com ΔZ negativo; havendo várias, a de ΔZ mais negativo. Se todos os ΔZ ≥ 0, a solução atual é ótima.

PASSO 3 · VARIÁVEL QUE SAI DA BASE

Quanto enviar por x_{31}?

	C1	C2	Oferta
D1	2,50 **15**	3,00 **0**	15
D2	3,50 **25 − θ**	+ 2,30 **10 + θ**	35
D3	+ 3,20 **θ**	− 2,80 **40 − θ**	40
Dem.	40	50	**90**

Z = 260,00 − 0,80θ

θ	Z (planilha)
0	260,00
1	259,20
2	258,40
25	240,00

$x_{21} = 25 - \theta \geq 0 \rightarrow \theta \leq 25$

$x_{32} = 40 - \theta \geq 0 \rightarrow \theta \leq 40$

θ = mín(25; 40) = 25 → x_{21} sai da base

NOVA SOLUÇÃO BÁSICA

x_{31} entra, x_{21} sai

C1	C2	Oferta	D1
2,50 **15**	3,00 **0**	15	**D2**
3,50 **0**	2,30 **35**	35	**D3**
3,20 **25**	2,80 **15**	40	**Dem.**
40	50	**90**	

Novo teste (passo 2)

$\Delta Z_{12} = +3{,}00 - 2{,}50 + 3{,}20 - 2{,}80 =$ **+0,90**

ciclo $x_{12} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{32}$

$\Delta Z_{21} = +3{,}50 - 2{,}30 + 2{,}80 - 3{,}20 =$ **+0,80**

ciclo $x_{21} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{31}$

Todos os ΔZ ≥ 0: solução ótima.

Z* = 240,00

Economia de 20,00 (≈ 7,69%) em relação ao Canto Noroeste.

PARTE 2

Generalização

m fontes, n destinos: enunciado, rede e formulação matemática.

GENERALIZAÇÃO

O problema de transporte

Uma organização dispõe de **m fontes** de fornecimento e precisa distribuir um produto a **n destinos**. Cada fonte i tem capacidade a_i, cada destino j apresenta demanda b_j e cada rota i → j tem custo unitário c_{ij}. Quanto transportar em cada rota para atender às demandas com o menor custo total?

DECISÃO

Quanto enviar de cada fonte a cada destino (x_{ij}).

OBJETIVO

Minimizar o custo total de transporte.

CONDIÇÕES

Respeitar capacidades, demandas e não negatividade.

GENERALIZAÇÃO

Elementos da rede

Fontes

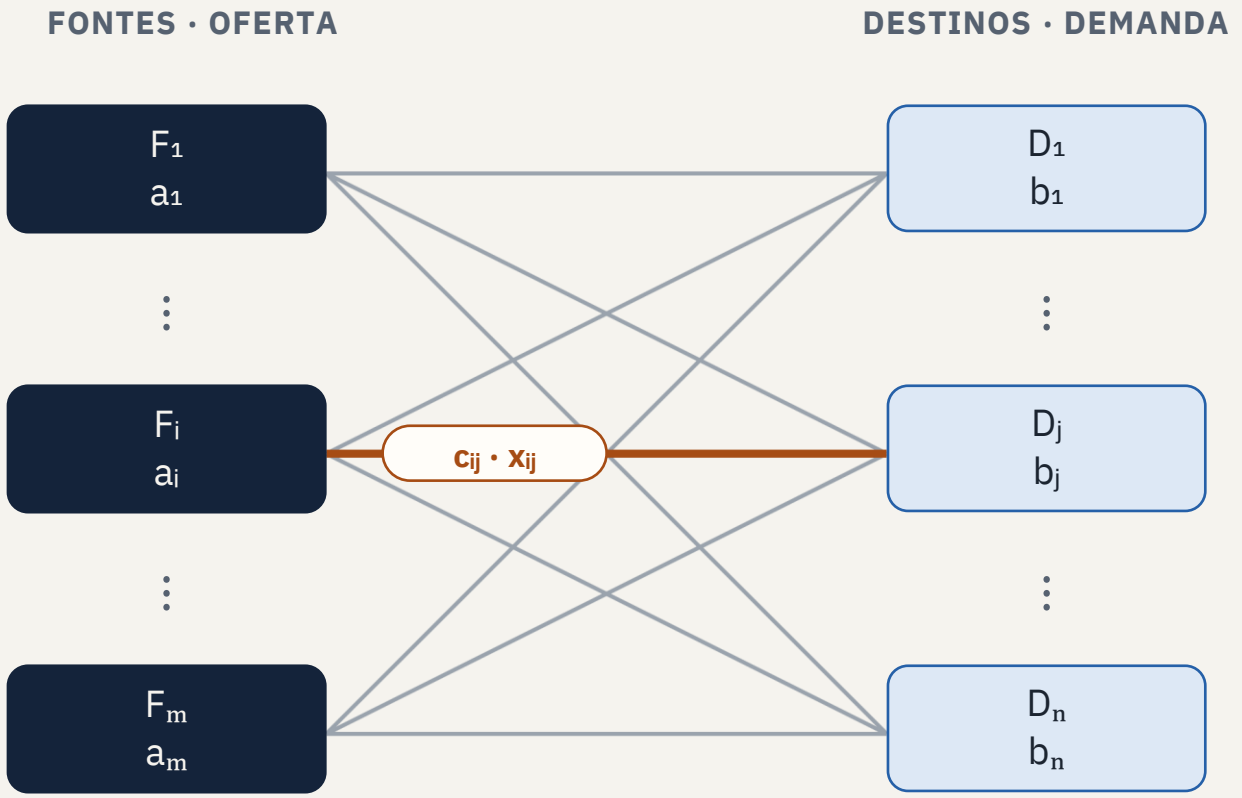
Fábricas, centros de distribuição ou fornecedores, cada um com oferta a_i.

Destinos

Depósitos, mercados ou clientes, cada um com demanda b_j.

Rotas

Ligações i → j com custo unitário c_{ij}; o fluxo x_{ij} é a decisão.



GENERALIZAÇÃO

Formulação matemática

Parâmetros e variáveis

m fontes e **n** destinos

a_i oferta da fonte i

b_j demanda do destino j

c_{ij} custo unitário da rota i → j

x_{ij} quantidade transportada de i para j

Minimizar

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, \ldots, m \quad \text{oferta}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, \ldots, n \quad \text{demanda}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{não negatividade}$$

Equilíbrio: $\Sigma\, a_i = \Sigma\, b_j$. Se forem diferentes, acrescenta-se uma fonte ou um destino fictício.

m·n variáveis, **m + n** restrições, mas a base tem apenas **m + n − 1** variáveis.

GENERALIZAÇÃO

Por que a base tem m + n − 1 variáveis?

1 · Somando as m restrições de oferta

$\Sigma_i \Sigma_j x_{ij} = \Sigma_i a_i$

2 · Somando as n restrições de demanda

$\Sigma_i \Sigma_j x_{ij} = \Sigma_j b_j$

3 · Como $\Sigma a_i = \Sigma b_j$

as duas somas são a mesma equação

Qualquer uma das m + n restrições pode ser obtida das outras m + n − 1: uma delas é **redundante**. O posto da matriz de restrições é m + n − 1 e toda solução básica tem **m + n − 1 variáveis básicas**.

Exemplo 1: 2 + 2 − 1 = 3 básicas (x_{11}, x_{21}, x_{22})

Exemplo 2: 3 + 2 − 1 = 4 básicas (x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{32})

Se uma variável básica valer zero, a solução é degenerada, mas a variável continua na base.

PARTE 3

Algoritmos

Canto Noroeste, ciclo fechado e Stepping Stone.

ALGORITMO

Método do Canto Noroeste

1. Comece pela célula superior esquerda (x_{11}).
2. Aloque o mínimo entre a oferta restante da linha e a demanda restante da coluna.
3. Elimine a linha ou a coluna satisfeita e avance para a direita ou para baixo.
4. Repita até esgotar todas as ofertas e demandas.

Não usa os custos: gera uma solução básica viável com m + n − 1 alocações, mas possivelmente cara. Se linha e coluna se esgotam juntas, elimina-se só uma e aloca-se 0 na célula seguinte (degenerescência).

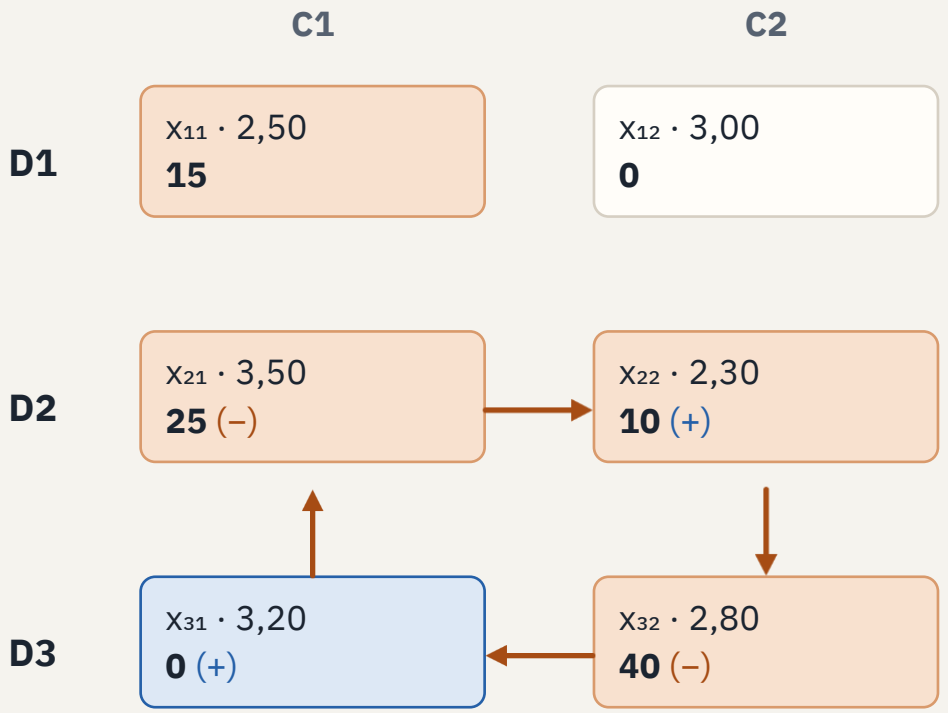
	C1	C2	Oferta	D1
	1º 2,50 **15**	3,00 **0**	15	**D2**
	2º 3,50 **25**	3º 2,30 **10**	35	**D3**
	3,20 **0**	4º 2,80 **40**	40	**Dem.**
	40	50	**90**	

ALGORITMO

O que é um ciclo fechado?

Caminho que parte de uma célula **não básica** e retorna a ela, alternando movimentos horizontais e verticais, com vértices apenas em células **básicas**.

- ✓ Sinais alternados: + na célula avaliada; depois −, +, −...
- ✓ Cada linha e cada coluna do ciclo têm um + e um −: ofertas e demandas continuam satisfeitas.
- ✓ Número par de vértices (no mínimo 4); para cada célula não básica, o ciclo é único.
- ✓ O caminho pode passar sobre outras células sem fazer vértice nelas.



Ciclo de x_{31} (exemplo 2): $\Delta Z_{31} = +3{,}20 - 3{,}50 + 2{,}30 - 2{,}80 = -0{,}80$

ALGORITMO

Método Stepping Stone

1 Iniciar

Obter uma solução básica viável (Canto Noroeste) e calcular Z.

2 Avaliar

Para cada célula não básica, construir o ciclo fechado e calcular ΔZ_{ij} pela soma algébrica dos custos.

3 Testar

Se todos os $\Delta Z_{ij} \geq 0$, a solução é ótima; $\Delta Z_{ij} = 0$ indica ótimo alternativo.

4 Selecionar

Entra na base a célula com ΔZ_{ij} mais negativo.

5 Ajustar

θ = menor alocação nas posições (–) do ciclo; somar θ nas (+) e subtrair nas (–).

6 Atualizar

Sai da base a célula que se anulou; manter $m + n - 1$ básicas e voltar a “Avaliar”.

SÍNTESE

Do quadro inicial à solução ótima

Canto Noroeste
solução inicial

→

Avaliar ΔZ
ciclos fechados

→

Entra
ΔZ mais negativo

→

Sai
θ = menor (–)

Repete-se a partir de “Avaliar ΔZ” até que todos os $\Delta Z_{ij} \geq 0$.

Exemplo	Canto Noroeste	Ótimo	Economia
2 depósitos × 2 centros	124,00	124,00	0,00
3 depósitos × 2 centros	260,00	240,00	20,00