

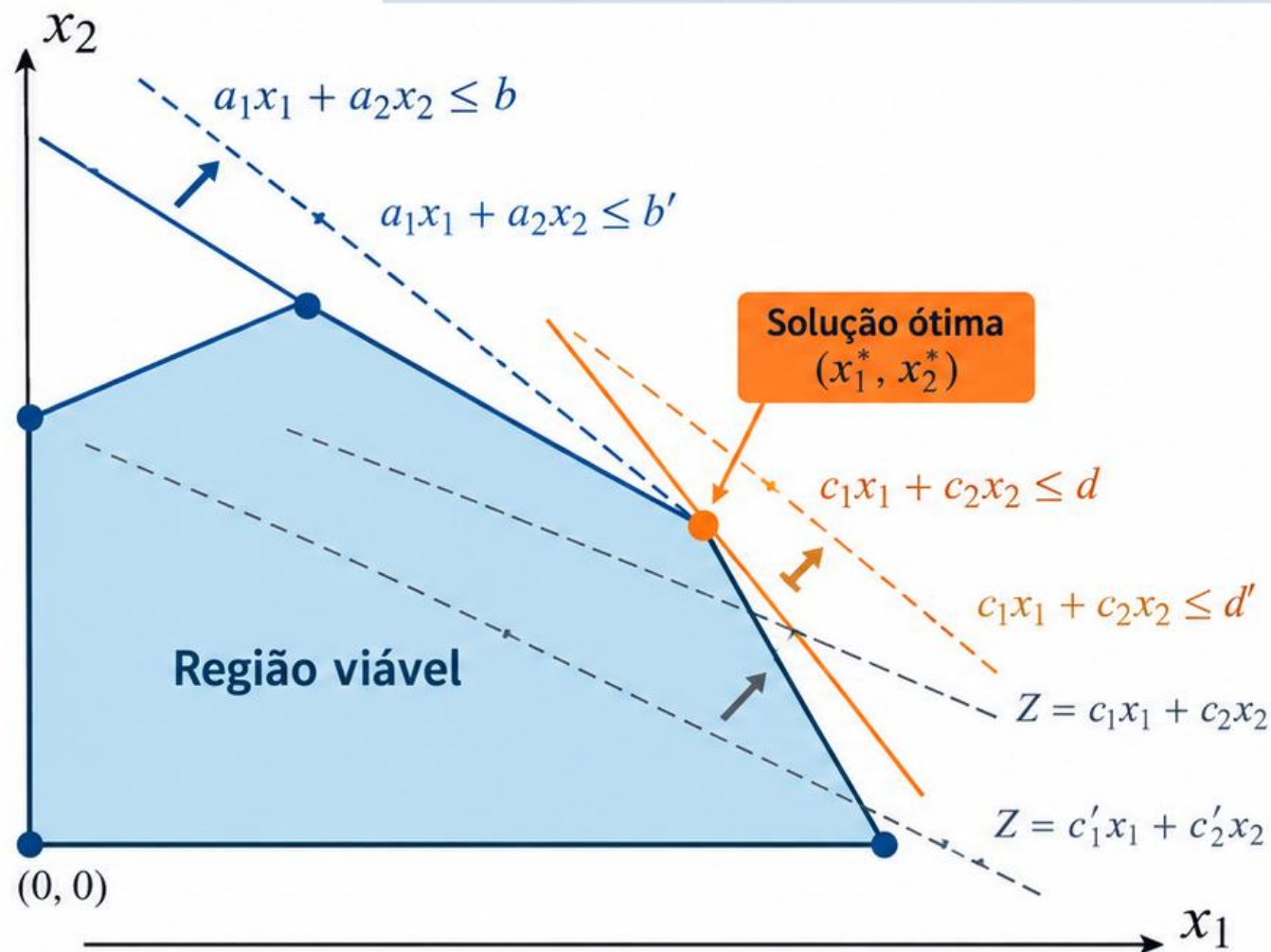
Cap 4

Dualidade e sensibilidade

Prof MS Clayton J A Silva

Análise pós-otimização

ANÁLISE DE PÓS-OTIMIZAÇÃO



- Restrições (dados originais)
- - - Restrições (após pequena mudança)
- Função objetivo (original)
- - - Função objetivo (após pequena mudança)



A solução continua viável?



Continua ótima?



Qual é o impacto em Z ?



Quais são os limites?



É preciso reotimizar?



Diante da incerteza nos dados, a solução ótima deve ser reavaliada.

O QUE PODE MUDAR NO MODELO?

1

Disponibilidade dos recursos



b

2

Coeficientes da função objetivo



$$z = c^T x$$

3

Coeficientes tecnológicos



$$A x \leq b$$

4

Nova variável



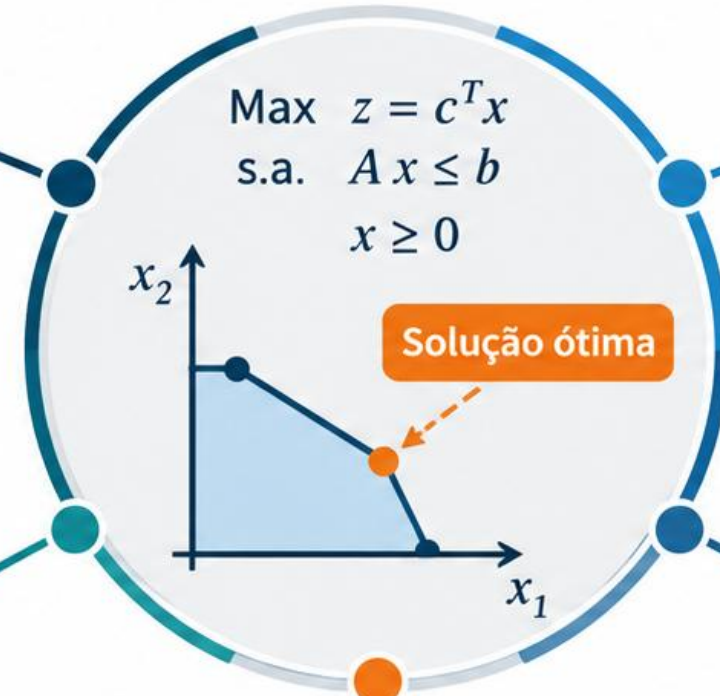
x_j

5

Nova restrição



$$a^T x \leq b$$



VARIAÇÕES NAS QUANTIDADES DE RECURSOS

Disponibilidade dos recursos

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{b}$

(vetor de disponibilidades)

Base viável

$$x_B \geq 0$$

A base permanece viável para a nova disponibilidade.

Base inviável

alguma variável básica < 0

A base deixa de ser viável para a nova disponibilidade.

Intervalo de sensibilidade



PREÇO-SOMBRA

Ganho marginal no valor ótimo ao aumentar um recurso



Preço-sombra = R\$ 7 por unidade



Cada unidade adicional desse recurso aumenta o valor ótimo em R\$ 7 (dentro do intervalo de sensibilidade).

Intervalo de sensibilidade



Válido somente no intervalo de sensibilidade

$$Z \text{ novo} = Z \text{ atual} + \text{preço-sombra} \times \Delta b_i$$

Folga positiva



recurso ocioso

preço-sombra = 0

EXEMPLO SIMPLES DE PREÇO-SOMBRA

1 MODELO



Maximizar $Z = 10x$
Sujeito a: $2x \leq 40$
 $x \geq 0$

(2 unidades de recurso produzem 1 unidade de x)

2 SOLUÇÃO ATUAL



$$x^* = 20$$
$$Z^* = \text{R\$ } 200$$



Lucro ótimo atual:
R\$ 200

3 +1 UNIDADE DO RECURSO



$$2x \leq 41$$
$$x^* = 20,5$$
$$Z^* = \text{R\$ } 205$$



Novo lucro ótimo:
R\$ 205

4 PREÇO-SOMBRA

$$\text{Preço-sombra} = \Delta Z / \Delta b$$

$$\text{Preço-sombra} = (205 - 200) / (41 - 40)$$

Preço-sombra = **R\$ 5** por unidade do recurso



+R\$ 5

Cada unidade adicional do recurso aumenta o lucro ótimo em R\$ 5, enquanto o preço-sombra permanecer válido.

O QUE É CUSTO REDUZIDO?

Contribuição unitária
na função objetivo

$$c_j$$

lucro, receita ou economia
gerada por uma unidade

menos



Valor de oportunidade
dos recursos consumidos

$$y^T a_j$$

consumo de recursos avaliado
pelos preços-sombra

Custo reduzido

$$\bar{c}_j = c_j - y^T a_j$$

Variável não básica:

$$x_j = 0$$

Indica quanto a **contribuição de uma atividade fora da base**
precisa melhorar para que ela se torne **economicamente competitiva**.

EXEMPLO SIMPLES DE CUSTO REDUZIDO

1 MODELO AMPLIADO

Maximizar

$$Z = 10x + 12y$$

Sujeito a:

$$2x + 3y \leq 40$$

$$x, y \geq 0$$

Mesmo recurso e mesma atividade x do exemplo anterior, agora com uma atividade candidata y .

2 SOLUÇÃO ATUAL

$$x^* = 20$$

$$y^* = 0$$

$$Z^* = \text{R\$ } 200$$

Preço-sombra do recurso = **R\$ 5**

Variáveis na solução:

Base

x

$$(x^* = 20)$$

na base

y

$$(y^* = 0)$$

fora da base

3 ATIVIDADE CANDIDATA y



Contribuição unitária de y = **R\$ 12**



y consome **3** unidades do recurso



Valor dos recursos = $3 \times \text{R\$ } 5 = \text{R\$ } 15$

Usa o preço-sombra de **R\$ 5** do recurso.

4 CUSTO REDUZIDO

$$\bar{c}_y = c_y - \text{preço-sombra} \times \text{consumo}$$

$$\bar{c}_y = 12 - 5 \times 3 = -3$$

$$\bar{c}_y = -\text{R\$ } 3$$

y permanece fora da base.

y

$$(y^* = 0)$$

fora da base

Para atingir o limite, sua contribuição precisa aumentar de **R\$ 12** para **R\$ 15**

VARIAÇÕES NOS COEFICIENTES DAS ATIVIDADES

Situação original

$$4x_1 + 2x_2 \leq 40$$



Atividade x_1
(mesa)

4 unidades
de madeira



Atividade x_2
(cadeira)

2 unidades
de madeira

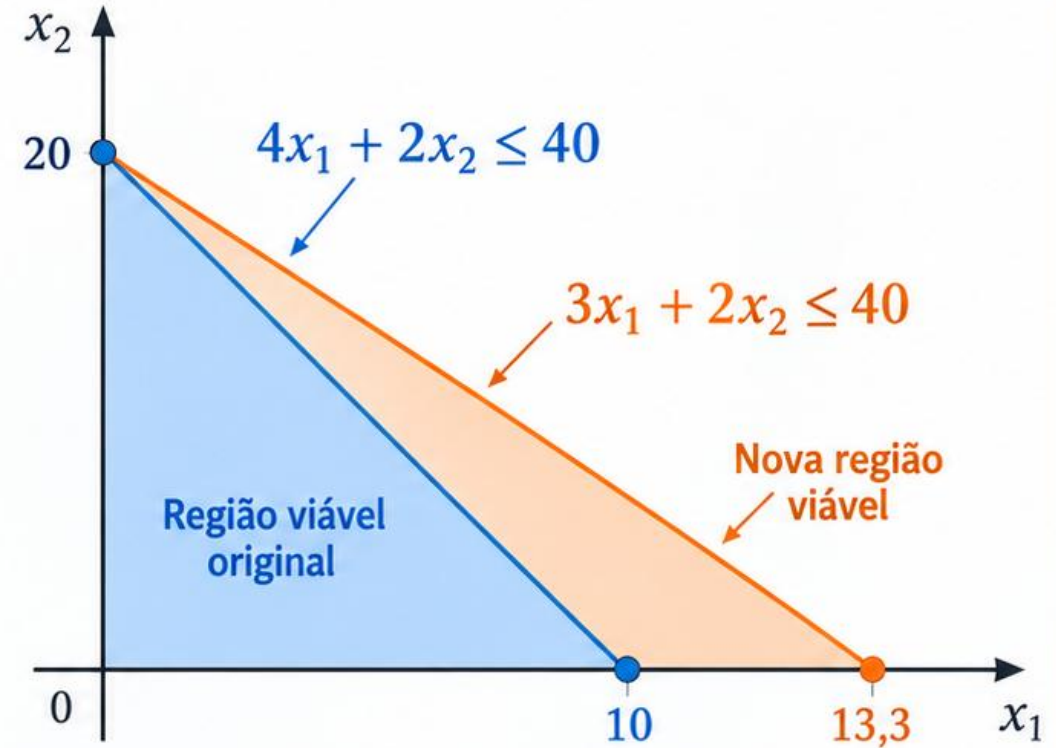
4 unidades de recurso
por unidade de x_1

Mudança
tecnológica

$$3x_1 + 2x_2 \leq 40$$

Agora cada unidade de x_1
usa apenas 3 unidades
de madeira

A região viável pode mudar



Podem mudar: viabilidade, valores das variáveis e base ótima

O QUE MUDA — E QUAL É O EFEITO?

1

ALTERAÇÃO
EM b

O QUE MUDA

b ↗

EFEITO DIRETO

x_B 

Mudam os valores
das variáveis básicas

O QUE NÃO MUDA

$\bar{c}_N$

Custos reduzidos
não mudam

CONSEQUÊNCIA POSSÍVEL



Uma variável básica pode
ficar negativa e sair da base

2

COLUNA NÃO
BÁSICA DE A

O QUE MUDA

a_j ↗

EFEITO DIRETO

$\bar{c}_j$ 

Muda o custo reduzido
dessa variável

O QUE NÃO MUDA

x_B

Valores da solução
básica atual não mudam

CONSEQUÊNCIA POSSÍVEL



A variável pode tornar-se
atrativa e entrar na base

3

COLUNA BÁSICA
DE A

O QUE MUDA

a_j ↗

EFEITO DIRETO

B 

A própria matriz B
muda

O QUE RECALCULAR

B^{-1}

B^{-1} também precisa
ser recalculada

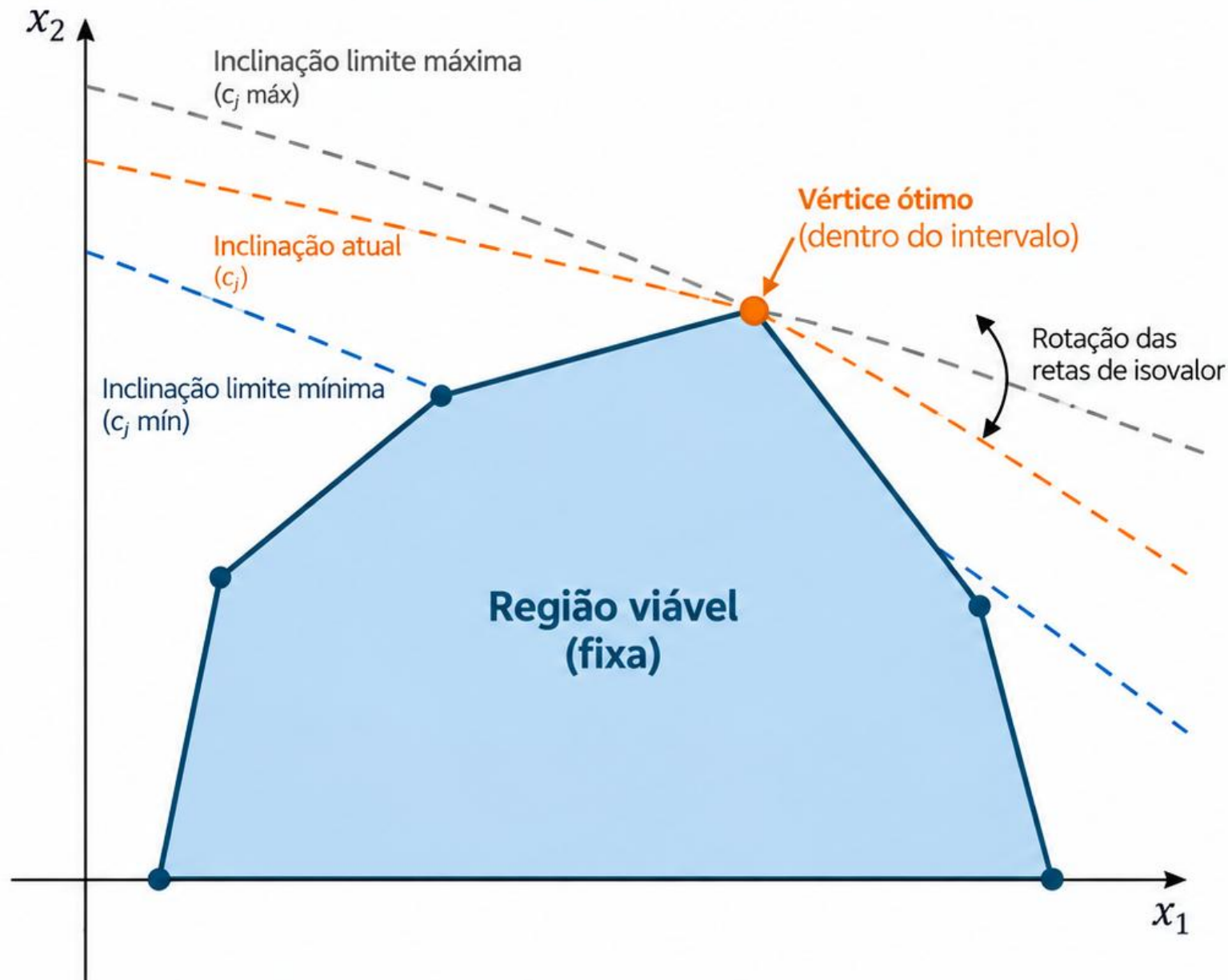
CONSEQUÊNCIA POSSÍVEL



A viabilidade e a
otimalidade podem mudar

Em todos os casos, uma alteração pode levar a uma nova composição da base ótima.

VARIAÇÕES NA FUNÇÃO OBJETIVO



$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

A região viável não muda



A inclinação da função objetivo muda



Intervalo de otimalidade

$$c_j \text{ mín} \leq c_j \leq c_j \text{ máx}$$

Dentro do intervalo: mesma base ótima

Fora do intervalo: outro vértice pode ser ótimo

VARIAÇÃO DE UM COEFICIENTE DA FUNÇÃO OBJETIVO

