

Cap 4

Dualidade e sensibilidade

Prof MS Clayton J A Silva

MODELO GERAL DE PROGRAMAÇÃO LINEAR



**Função
Objetivo**

Maximizar ou Minimizar $Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$



Restrições

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq, =) b_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m$$

b_i são constantes conhecidas



**Não
Negatividade**

$$x_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

ONDE:

- x_j variáveis de decisão
- c_j coeficientes da função objetivo (lucro, custo, etc.)
- a_{ij} coeficientes técnicos das restrições
- b_i disponibilidade de recursos (lado direito das restrições)
- m número de restrições
- n número de variáveis de decisão

1. Introdução à dualidade

Todo problema de Programação Linear, denominado **primal**, possui um segundo problema associado, chamado **dual**. Os dois modelos são construídos a partir dos mesmos dados e estão fortemente relacionados: a estrutura de um contém informações sobre o outro.

Ideia central. Quando o primal representa, por exemplo, a melhor forma de utilizar recursos para maximizar um resultado, o dual pode ser interpretado como um problema de avaliação econômica desses recursos.

2. Montagem do problema dual

Problema primal

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Problema dual

$$\min z = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Problemas primal e dual

Formulação matricial



PRIMAL

$$\max Z = c^T x$$

sujeito a

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

n variáveis • m restrições



DUAL

$$\min z = b^T y$$

sujeito a

$$A^T y \geq c$$

$$y \geq 0$$

m variáveis • n restrições

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$

transposição



$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$n \times m$



As **linhas** de A tornam-se **colunas** de A^T : restrições do primal correspondem a variáveis do dual.

3. Exemplo de construção do dual

Considere o problema primal:

Problema primal

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

sujeito a

$$x_1 + 5x_2 \leq 18$$

$$2x_1 + x_2 \leq 15$$

$$5x_1 - 2x_2 \leq 20$$

$$x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema dual

$$\min z = 18y_1 + 15y_2 + 20y_3 + 8y_4$$

sujeito a

$$y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 1$$

$$5y_1 + y_2 - 2y_3 + y_4 \geq 2$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Como há quatro restrições estruturais no primal, o dual terá quatro variáveis: y_1, y_2, y_3, y_4 .

Regras de correspondência

No primal	No dual
m restrições	m variáveis
n variáveis	n restrições
Lados direitos b	Coeficientes do objetivo
Coeficientes do objetivo c	Lados direitos
Matriz A	Matriz transposta A^T

Sinais e variáveis irrestritas

Primal de maximização	Dual de minimização
Restrição $\leq$	Variável $y_i \geq 0$
Restrição $\geq$	Variável $y_i \leq 0$
Restrição $=$	Variável y_i livre
Variável $x_j \geq 0$	Restrição $\geq$
Variável x_j livre	Restrição $=$

Avaliação econômica dos recursos

PLANO DE PRODUÇÃO

$$\max Z = 5x_1 + 6x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$x_1 + x_2 \leq 9$$

$$7x_1 + 4x_2 \leq 56$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

VALOR DO ESTOQUE

$$\min z = 14y_1 + 9y_2 + 56y_3$$

$$y_1 + y_2 + 7y_3 \geq 5$$

$$2y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 6$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Simplex em duas fases: restrições $\geq$

Preparação das restrições ($b_i \geq 0$)

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i \quad \rightarrow \quad \sum_j a_{ij} x_j - e_i + a_i = b_i$$

$e_i \geq 0$: variável de excesso • $a_i \geq 0$: variável artificial

$x \geq 0$. Com $b \geq 0$, as artificiais formam a base inicial.

FASE 1 — Encontrar viabilidade

$$\min w = a_1 + \cdots + a_m$$

Aplicar o Simplex ao problema auxiliar.

$$w^* > 0$$

Problema
original inviável.

$$w^* = 0$$

Prosseguir para
a Fase 2.

FASE 2 — Otimizar

1. Retirar artificiais básicas nulas por pivoteamento; remover linhas redundantes, se necessário.
2. Excluir as colunas artificiais e restaurar a função objetivo original.
3. Continuar o Simplex com a base viável.

As variáveis de excesso permanecem no modelo; as artificiais são eliminadas antes da otimização original.

Excesso e artificial: por que usar?

Exemplo: $x_1 + x_2 \geq 6$, com $x_1, x_2 \geq 0$

1. Variável de excesso

Transforma a desigualdade em igualdade.

$$x_1 + x_2 - e = 6, e \geq 0$$

e mede quanto o lado esquerdo supera 6.

Se $x_1 + x_2 = 8$, então $e = 2$: $8 - 2 = 6$.

Ela faz parte do modelo equivalente.

2. Variável artificial

Fornece uma base viável inicial para o Simplex.

Com $x_1 = x_2 = 0$, teríamos $e = -6$, o que viola $e \geq 0$.

$$x_1 + x_2 - e + a = 6, a \geq 0$$

Agora podemos começar com $x_1 = x_2 = e = 0$ e $a = 6$.

É um recurso temporário do problema auxiliar.

Após a Fase 1: minimizar w = soma das artificiais

$w^* = 0 \rightarrow$ **Problema original viável**

Todas as artificiais valem zero. Retire as artificiais da base por pivoteamento ou remova linhas redundantes, se necessário. Exclua suas colunas e inicie a Fase 2 com a função objetivo original.

$w^* > 0 \rightarrow$ **Problema original inviável**

Alguma artificial precisa permanecer positiva: as restrições originais não podem ser satisfeitas simultaneamente. Encerre o método; não há Fase 2.

Excesso: mede a sobra. Artificial: permite iniciar. Fase 1: testa a viabilidade.