

Cap 3

Modelo matemático para PL e o método Simplex

Prof MS Clayton J A Silva

MODELO GERAL DE PROGRAMAÇÃO LINEAR



**Função
Objetivo**

Maximizar ou Minimizar $Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$



Restrições

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq, =) b_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m$$

b_i são constantes conhecidas



**Não
Negatividade**

$$x_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

ONDE:

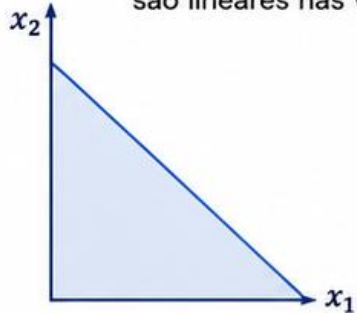
- x_j variáveis de decisão
- c_j coeficientes da função objetivo (lucro, custo, etc.)
- a_{ij} coeficientes técnicos das restrições
- b_i disponibilidade de recursos (lado direito das restrições)
- m número de restrições
- n número de variáveis de decisão

PREMISSAS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

O método **Simplex** é válido quando o problema satisfaz as seguintes premissas:

1 Linearidade

A função objetivo e todas as restrições são lineares nas variáveis de decisão.



Exemplo:

$$\text{Max } Z = 30x_1 + 50x_2$$

s.a.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$2x_1 + x_2 \leq 12$$

2 Proporcionalidade

A contribuição de cada variável para a função objetivo e o consumo de recursos são proporcionais à quantidade produzida/utilizada.



Exemplo:

- 1 unidade de x_1 consome 3 unidades do recurso.
- 2 unidades de x_1 consomem 6 unidades do recurso.

3 Aditividade

Os efeitos das variáveis são independentes e somados para obter o resultado total.

Efeito de x_1

+

Efeito de x_2

=

Efeito total

Exemplo:

$$Z = 30x_1 + 50x_2$$

é a soma das contribuições individuais.

4 Divisibilidade

As variáveis de decisão podem assumir valores fracionários (contínuos).



Exemplo:

$x_1 = 7,5$ e $x_2 = 5$ são soluções admissíveis.

(Se exigirmos valores inteiros, o problema deixa de ser PL e passa a ser PLI.)

5 Certeza dos parâmetros

Os coeficientes da função objetivo (c_j), das restrições (a_{ij}) e os termos independentes (b_i) são conhecidos e constantes durante a solução.

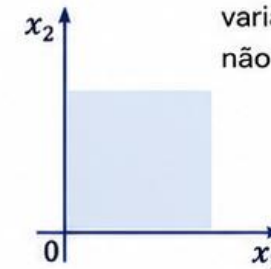


Exemplo:

Os valores 30, 50, 3, 2, 18 etc. são dados determinados no modelo.

6 Não negatividade

Todas as variáveis de decisão e as variáveis de folga devem ser não negativas.



Exemplo:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\text{Folgas: } f_i \geq 0$$



Importante: Com essas premissas, o conjunto de soluções viáveis é convexo e, se existir solução ótima finita, ela ocorre em pelo menos um ponto extremo (vértice) da região viável.

x_1, x_2 → variáveis de decisão
 f_i → variáveis de folga
 c_j, a_{ij}, b_i → parâmetros do modelo

REGIÃO VIÁVEL, SOLUÇÕES BÁSICAS E ÓTIMO

Por que o Simplex busca o ótimo nos vértices da região viável?

1 Região viável



Conjunto de todos os pontos que satisfazem simultaneamente todas as restrições e as condições de não negatividade.

2 Convexidade



Se dois pontos viáveis A e B pertencem à região, qualquer ponto do segmento que os une também é viável.

$$0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda A + (1 - \lambda)B \text{ é viável}$$

3 Vértices (pontos extremos)



A região viável é um polígono (em 2D) ou um poliedro (em n dimensões). Seus **vértices** são pontos **extremos** da região.

4 Solução básica viável



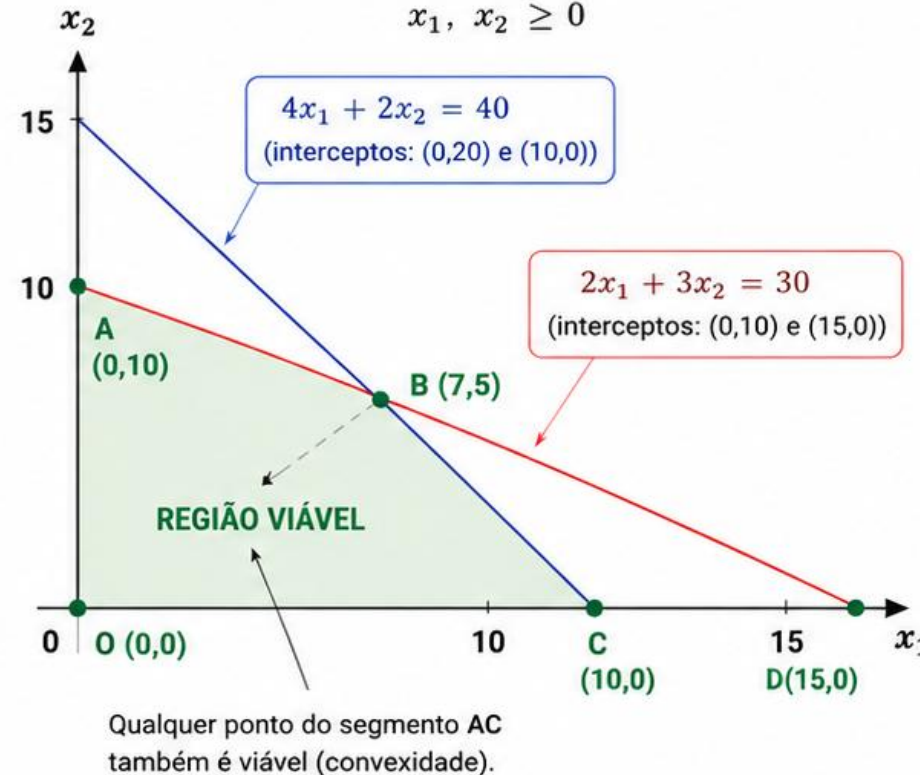
Cada conjunto de m variáveis básicas define um ponto. Se todos os valores básicos forem ≥ 0 , temos uma **solução básica viável**, que (sob as condições usuais) corresponde a um **vértice**.



Observação: Em dimensões maiores ($n > 2$), a região viável é um poliedro e os vértices são a generalização dos pontos extremos.

Exemplo (2 variáveis)

Modelo: $\text{Max } Z = 50x_1 + 40x_2$
s.a. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$



Ótimo em um vértice

Em problemas de Programação Linear, se a solução ótima for finita, **existe pelo menos uma solução ótima em um vértice da região viável**.



Interpretação

- Cada vértice $\leftrightarrow$ uma solução básica viável.
- O **Simplex** move-se de vértice em vértice (troca de base), buscando melhorar Z .



Ideia central

Linearidade + convexidade



Ótimo ocorre em um vértice



Simplex = caminhar entre soluções básicas viáveis

SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES

Modelos de Programação Linear, após a conversão das restrições em igualdades, podem ser representados por um sistema linear de equações:

$$Ax = b$$

DEFINIÇÕES

A : matriz de coeficientes $m \times n$

x : vetor de incógnitas $n \times 1$

b : vetor dos termos independentes $m \times 1$

CONDIÇÕES DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

1 SISTEMA POSSÍVEL DETERMINADO (SPD)

✓ Possui uma única solução.

Relação entre equações (m) e incógnitas (n)	$m = n$ Número de equações igual ao número de incógnitas.
Condição de solução única	As equações são linearmente independentes.
Interpretação	O sistema determina completamente os valores de todas as incógnitas.
Número de soluções	1 solução

2 SISTEMA POSSÍVEL INDETERMINADO (SPI)

∞ Possui infinitas soluções.

Relação entre equações (m) e incógnitas (n)	$m < n$ Menos equações do que incógnitas. (sistema subdeterminado)
Condição	As equações são compatíveis, mas linearmente dependentes.
Interpretação	Existem variáveis livres. As equações impõem restrições, mas não determinam todas as incógnitas.
Número de soluções	Infinitas soluções (conjunto solução não vazio com dimensão > 0)

3 SISTEMA IMPOSSÍVEL (SI)

✗ Não possui solução.

Relação entre equações (m) e incógnitas (n)	$m \geq n$ Igual ou mais equações do que incógnitas. (superdeterminado ou quadrado)
Condição	Há incompatibilidade entre as equações.
Interpretação	As equações entram em contradição para qualquer conjunto de valores das incógnitas.
Número de soluções	Nenhuma solução (conjunto solução vazio)

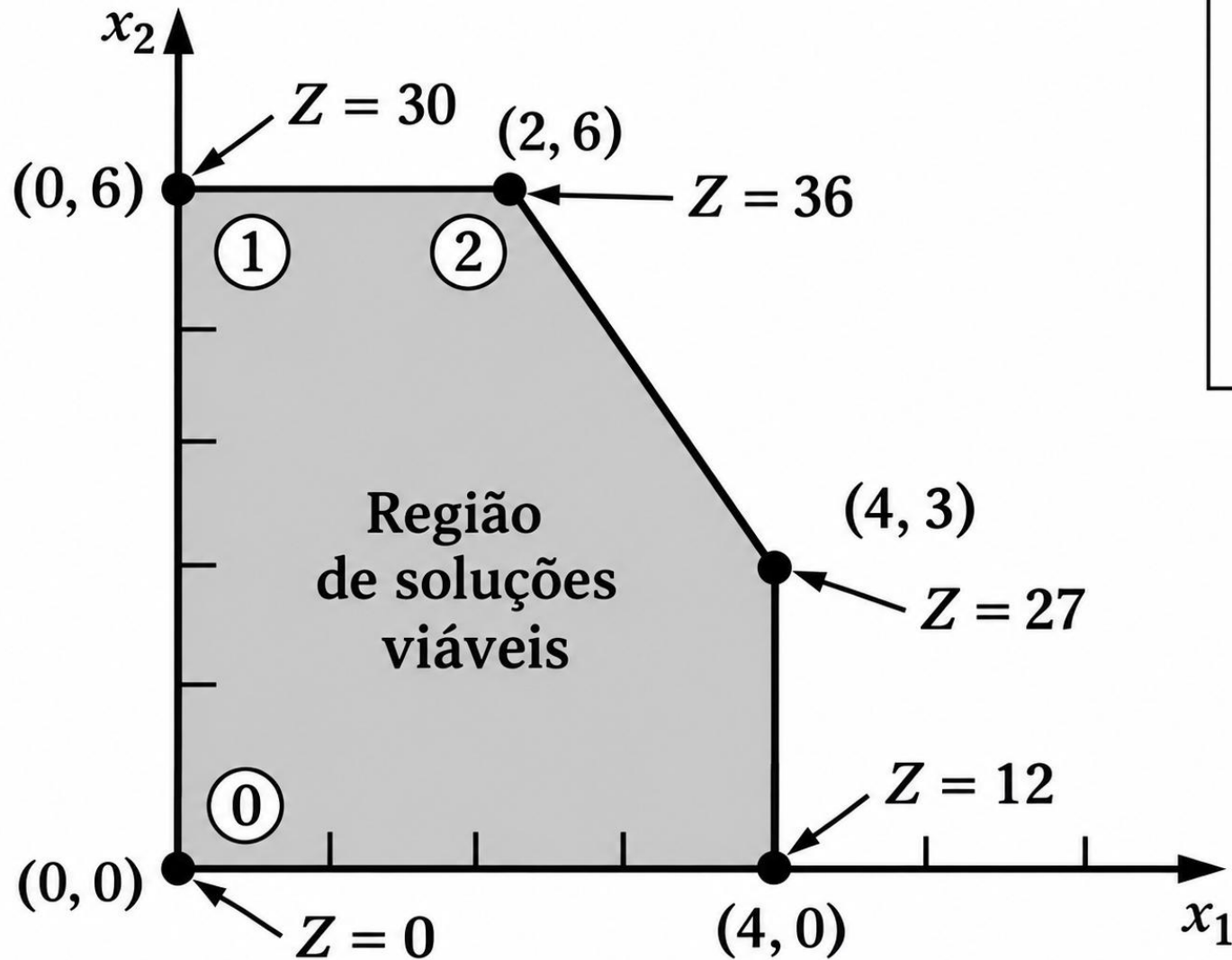


OBSERVAÇÃO: A classificação do sistema depende dos postos da matriz de coeficientes A e da matriz aumentada $[A | b]$.
Consistência do sistema $\Leftrightarrow \text{posto}(A) = \text{posto}([A | b])$. Se isso não ocorre, o sistema é impossível.

O método Simplex

- O método simplex é um **procedimento algébrico**. Entretanto, seus conceitos subjacentes são **geométricos**.
- Os pontos de interseção são as soluções em **pontos extremos (PEF – pontos extremos factíveis)**.
- Soluções **PEF adjacentes**: compartilham um limite de restrição.
- Se uma solução PEF adjacente **não possuir nenhuma solução adjacente melhor** (que proporcione um objetivo) então ela é ótima.

O método Simplex



Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$,
sujeito a

$$x_1 \leq 4$$

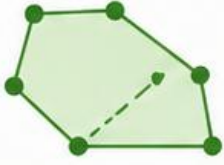
$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

e

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

CONCEITOS FUNDAMENTAIS DO MÉTODO SIMPLEX



- 1 Região viável:** Conjunto de todos os pontos que satisfazem simultaneamente todas as restrições do problema e as condições de não negatividade.



- 2 Convexidade:** Se dois pontos viáveis A e B pertencem à região, qualquer ponto do segmento de reta que os une também pertence à região. Matematicamente, para $0 \leq \lambda \leq 1$, o ponto $\lambda A + (1 - \lambda)B$ é viável.



- 3 Vértices (pontos extremos):** São os pontos da região viável que não podem ser expressos como combinação convexa de outros pontos distintos da região. Em 2D, são os “cantos” do polígono; em n dimensões, são os pontos extremos do politopo.

Base	x_1	x_2	...	x_n
Solução	0	0	...	0

- 4 Solução básica:** Obtida ao escolher m variáveis para formar a base ($m = \text{nº de restrições}$) e atribuir valor zero às demais (variáveis não básicas).



- 5 Solução básica viável:** Solução básica em que todas as variáveis básicas assumem valores não negativos (≥ 0). Sob as condições usuais do problema, corresponde a um vértice da região viável.



- 6 Ótimo em um vértice:** Em problemas de Programação Linear, se a solução ótima for finita, existe pelo menos uma solução ótima em um vértice da região viável. O Simplex move-se de vértice em vértice (troca de base), buscando melhorar o valor da função objetivo até atingir o ótimo.

DO MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR AO SIMPLEX



O QUE É O MÉTODO SIMPLEX?

O Simplex é um **método iterativo** para determinar a **melhor solução** de um problema de Programação Linear, avaliando **sucessivas soluções do sistema de equações** associado ao modelo.

1 MODELO ORIGINAL DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Um problema de PL pode ser representado por:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

onde:

- $x \in \mathbb{R}^n$ (variáveis de decisão)
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (matriz de coeficientes)
- $b \in \mathbb{R}^m$ (vetor dos limites)
- $c \in \mathbb{R}^n$ (coeficientes da função objetivo)
- m = número de restrições
- n = número de variáveis de decisão



As restrições do modelo podem ser desigualdades ou igualdades.

2 CONVERSÃO DAS RESTRIÇÕES EM EQUAÇÕES

Para aplicar o método Simplex, as restrições são convertidas em **equações**, preservando as condições estabelecidas pelo modelo.

$$a_i^T x \leq b_i \quad \rightarrow \quad a_i^T x + f_i = b_i \quad \text{variável de folga} \quad (f_i \geq 0)$$

$$a_i^T x \geq b_i \quad \rightarrow \quad a_i^T x - e_i = b_i \quad \text{variável de excesso} \quad (e_i \geq 0)$$

$$a_i^T x = b_i \quad \rightarrow \quad a_i^T x = b_i \quad \text{permanece igualdade}$$

Observações:

- $f_i \geq 0$ mede quanto falta para atingir um limite máximo.
- $e_i \geq 0$ mede quanto se excede um limite mínimo.
- A conversão não altera a região factível do modelo.

3 SISTEMA DE EQUAÇÕES PREPARADO PARA O SIMPLEX

Após a conversão, o modelo é representado por um sistema linear de equações:

$$A'x' = b$$

onde:

- $A' \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$ é a matriz de coeficientes do sistema preparado;
- $x' \in \mathbb{R}^{n+p}$ contém as variáveis originais e as variáveis de folga/excesso;
- $b \in \mathbb{R}^m$ é o vetor dos limites;
- p = número de variáveis adicionadas (folgas e/ou excessos).



Este é o sistema sobre o qual o método Simplex será aplicado.



IDEIA CENTRAL: As restrições do modelo são convertidas em equações para que o problema possa ser tratado como um sistema linear, permitindo a aplicação do método Simplex.

TRANSFORMAÇÃO DO MODELO

INSERÇÃO DAS VARIÁVEIS DE FOLGA

MODELO ORIGINAL

Maximizar

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Não negatividade

$$x_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n$$



MODELO COM VARIÁVEIS DE FOLGA

Maximizar

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \boxed{f_1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + \boxed{f_2} = b_2$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + \boxed{f_m} = b_m$$

Não negatividade

$$x_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

$$\boxed{f_i} \geq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m$$

PROGRAMAÇÃO LINEAR E O MÉTODO SIMPLEX

Resumo: variáveis básicas, não básicas e solução inicial

1. PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Exemplo (mesas e cadeiras)

Maximizar $Z = 50x_1 + 40x_2$

sujeito a $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Objetivo:

determinar os valores de x_1 e x_2 que maximizam Z .



2. TRANSFORMAÇÃO (INSERÇÃO DE FOLGAS)

Transformamos as restrições em igualdades com variáveis de folga:

$$4x_1 + 2x_2 + f_1 = 40$$

$$2x_1 + 3x_2 + f_2 = 30$$

$$x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$$

3. CONCEITOS-CHAVE

Variáveis de decisão

$x_1, \dots, x_n$ São as variáveis que queremos determinar. A solução ótima do problema são seus valores.

Variáveis de folga

$f_1, \dots, f_m$ Representam os recursos não utilizados (folga) em cada restrição.

Variáveis básicas

Em cada iteração do Simplex, são as variáveis cujos valores são calculados pelas equações.

Variáveis não básicas

As demais variáveis são fixadas em zero naquela iteração.



Total de variáveis após a inserção das folgas:
 $n + m$ (n de decisão + m de folga)



Em cada iteração do Simplex:
 m variáveis básicas
(igual ao número de restrições)



n variáveis não básicas
(todas fixadas em zero)

FLUXOGRAMA DO MÉTODO SIMPLEX (USO DE FOLGAS)

O método Simplex é um processo iterativo para determinar a melhor solução (máxima ou mínima) de um problema de Programação Linear, avaliando sucessivas soluções básicas viáveis do sistema de equações associado ao modelo.

1 CONVERTER O MODELO PARA IGUALDADES (USO DE FOLGAS)

Transformamos o modelo de PL para um sistema de equações usando somente variáveis de folga.

Modelo original:

$$\begin{aligned} \max (\text{ou min}) \quad & Z = c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Conversão das restrições (somente folgas):

$$a_i^T x \leq b_i \quad \Rightarrow \quad a_i^T x + f_i = b_i \quad (f_i \geq 0)$$

Sistema de equações resultante:

$$\begin{aligned} Ax + If &= b \\ x, f &\geq 0 \end{aligned}$$

✓ Agora temos m equações e $n + m$ variáveis: n variáveis de decisão (x) e m variáveis de folga (f).

2 MONTAR O QUADRO INICIAL (ITERAÇÃO 0)

Organizamos o sistema no quadro (tabela) Simplex.

- 1 Escolher as variáveis de folga como variáveis básicas iniciais.
- 2 As variáveis de decisão (x) são não básicas (valem 0).
- 3 O quadro inicial terá a forma:

Quadro inicial com folgas como base:

Base	Variáveis						b
	x_1	$\dots$	x_n	f_1	$\dots$	f_m	
f_1	a_{11}	$\dots$	a_{1n}	1	$\dots$	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f_m	a_{m1}	$\dots$	a_{mn}	0	$\dots$	1	b_m
Z_j	c_1	$\dots$	c_n	0	$\dots$	0	0
$C_j - Z_j$	$c_1 - Z_1$	$\dots$	$c_n - Z_n$	0	$\dots$	0	

Como $b \geq 0$ e as folgas formam uma matriz identidade, a solução básica inicial é viável: $x = 0$ e $f = b$.

3 ITERAR (ITERAÇÕES 1, 2, 3, ...)

1 Calcular $C_j - Z_j$ para todas as variáveis (incluindo folgas).

2 Escolher variável que entra na base
Maior valor positivo de $C_j - Z_j$.
(Coluna pivô)

3 Teste de otimalidade
Existe $C_j - Z_j > 0$?

NÃO

SOLUÇÃO ÓTIMA ENCONTRADA

- Valores das variáveis básicas
- Valor da função objetivo Z

Nova iteração

4 Teste da razão mínima
Para cada linha i com $a_{ij} > 0$,
calcular $\frac{b_i}{a_{ij}}$.
(Coluna pivô)

5 Escolher variável que sai da base
Menor razão positiva.
Elemento na interseção = pivô.

6 Realizar operação de pivô
Transformar o pivô em 1 e zerar os demais elementos da coluna pivô.

7 Atualizar o quadro
Recalcular Z_j e $C_j - Z_j$ e voltar ao passo 1.

LEGENDA

- C_j : coeficiente da função objetivo da variável j .
- Z_j : contribuição atual da variável j na função objetivo.
- $C_j - Z_j$: custo reduzido (indica possibilidade de melhoria).
- b_i : termo independente da restrição i (lado direito).
- a_{ij} : coeficiente da variável j na restrição i .
- Pivô: elemento na interseção da linha de saída com a coluna de entrada.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

- Todas as variáveis (decisão e folga) devem permanecer ≥ 0 .
- O método termina quando não há $C_j - Z_j > 0$ (otimalidade alcançada).
- Para problemas de minimização, o teste muda para $C_j - Z_j < 0$.

VANTAGEM DO USO DE FOLGAS

Quando todas as restrições são do tipo " $\leq$ ", as folgas permitem obter uma solução básica inicial viável de forma direta e simples.



RESUMO DO FLUXO:

1 Converter para igualdades (adicionar folgas)



2 Montar quadro inicial (folgas na base)



3 Iterar: entrar, sair, pivô, atualizar quadro



Solução ótima alcançada

QUADRO INICIAL DO SIMPLEX

Modelo na forma padrão (com variáveis de folga)

Maximizar $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

Sujeito a
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + f_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + f_m = b_m \\ x_j \geq 0, f_i \geq 0 \end{cases}$$

Variáveis de decisão

$x_1, x_2, \dots, x_n$
(não básicas inicialmente)

Variáveis de folga

$f_1, f_2, \dots, f_m$
(formam a base inicial)

Termo independente

b_i
(disponibilidade dos recursos)

Variáveis básicas

São as variáveis na coluna da esquerda. Inicialmente são as variáveis de folga $f_1, f_2, \dots, f_m$.

c_B

Coefficientes da função objetivo das variáveis básicas. Como f_i não estão na função objetivo, $c_B = 0$.

Variáveis Básicas	c_B	x_1	x_2	$\dots$	x_n	f_1	f_2	$\dots$	f_m	b_i
f_1	0	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	1	0	$\dots$	0	b_1
f_2	0	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	0	1	$\dots$	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
f_m	0	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	0	0	$\dots$	1	b_m
Z_j		0	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0	0
$C_j - Z_j$		c_1	c_2	$\dots$	c_n	0	0	$\dots$	0	0

b_i

Valores disponíveis de cada recurso (termo independente de cada restrição).

Base inicial

Formada pelas variáveis de folga (colunas formam uma matriz identidade).

Z_j

Valores obtidos ao multiplicar cada coeficiente da linha por c_B correspondente e somar coluna a coluna.

$C_j - Z_j$ (linha de avaliação)

Indica o potencial de melhoria para cada variável não básica. Para maximização: se existir valor positivo, ainda é possível melhorar Z .

QUADRO INICIAL DO SIMPLEX – EXEMPLO

Problema: Produção de mesas (x_1) e cadeiras (x_2)

1. FORMULAÇÃO DO MODELO

Maximizar $Z = 50x_1 + 40x_2$

sujeito a $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 40 & (\text{madeira}) \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30 & (\text{trabalho}) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

2. TRANSFORMAÇÃO (INSERÇÃO DE FOLGAS)

$4x_1 + 2x_2 + f_1 = 40$ (folga de madeira)

$2x_1 + 3x_2 + f_2 = 30$ (folga de trabalho)

$x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

Variáveis

x_1, x_2 : variáveis de decisão

f_1 : folga de madeira

f_2 : folga de trabalho

b_i : recursos disponíveis

3. QUADRO INICIAL DO SIMPLEX

Variáveis básicas iniciais:

f_1 e f_2
(as folgas).

Coefficientes da
função objetivo
das variáveis
básicas.

Como f_1 e f_2
não estão na
função objetivo,
 $c_B = 0$.

Variáveis Básicas	c_B	Variáveis de decisão (não básicas)		Variáveis de folga (básicas)		b_i (termo independente)
		x_1	x_2	f_1	f_2	
f_1	0	4	2	1	0	40
f_2	0	2	3	0	1	30
Z_j		0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$		50	40	0	0	0

Valores
disponíveis
de cada recurso.

Todas as variáveis de decisão
são não básicas inicialmente
e recebem valor zero:
 $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.

As variáveis de folga são básicas
e compõem a solução inicial:
 $f_1 = 40$ e $f_2 = 30$.

Solução básica inicial:
 $(x_1, x_2, f_1, f_2) = (0, 0, 40, 30)$
Lucro inicial: $Z = 50(0) + 40(0) = 0$



Resumo: • $m = 2$ restrições $\rightarrow m = 2$ variáveis básicas iniciais (f_1, f_2). • $n = 2$ variáveis não básicas iniciais (x_1, x_2), todas com valor zero.

QUADRO DO SIMPLEX – ITERAÇÃO GENÉRICA ($k \geq 0$)

Válido para qualquer iteração do algoritmo

1 Base

Conjunto das m variáveis básicas nesta iteração. Podem ser variáveis de decisão ou folgas. Sempre há m variáveis na base ($m = n^\circ$ de restrições).

3 C_B

Coefficientes, na função objetivo, das variáveis básicas listadas na coluna da base.

2 Variáveis não básicas

Conjunto das n variáveis não básicas nesta iteração. Seus valores são 0.

4 Coeficientes das restrições

Coefficientes das variáveis (decisão e folgas) nas restrições após os pivoteamentos realizados até aqui.

5 b_i (termo independente)

Valor atual da variável básica correspondente na iteração. No quadro inicial, coincide com o limite de cada restrição.

Variáveis Básicas (base B)	C_B	Variáveis de decisão (não básicas)			Variáveis de folga (básicas ou não básicas)			b_i (termo independente)
		x_1	$\dots$	x_n	f_1	$\dots$	f_m	
x_{B1}	C_{B1}	a_{11}	$\dots$	a_{1n}	$a_{1,n+1}$	$\dots$	$a_{1,n+m}$	b_1
x_{B2}	C_{B2}	a_{21}	$\dots$	a_{2n}	$a_{2,n+1}$	$\dots$	$a_{2,n+m}$	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{Bm}	C_{Bm}	a_{m1}	$\dots$	a_{mn}	$a_{m,n+1}$	$\dots$	$a_{m,n+m}$	b_m
Z_j		Z_1	$\dots$	Z_n	Z_{n+1}	$\dots$	Z_{n+m}	Z
$C_j - Z_j$		$C_1 - Z_1$	$\dots$	$C_n - Z_n$	$C_{n+1} - Z_{n+1}$	$\dots$	$C_{n+m} - Z_{n+m}$	

6 Linha Z_j

$Z_j = \sum_{i=1}^m C_{Bi} a_{ij}$.
Contribuição da base atual para cada coluna j .
Na última coluna: $Z = \sum_{i=1}^m C_{Bi} b_i$,
valor atual da função objetivo.

7 Linha $C_j - Z_j$

$C_j - Z_j = c_j - Z_j$.
Avalia o potencial de melhoria.
Para maximização, se $C_j - Z_j > 0$,
há possibilidade de aumentar Z .



Ideia central:

Cada quadro representa uma solução básica. As linhas Z_j e $C_j - Z_j$ nos indicam se existe uma solução melhor e qual variável deve entrar na base.

Legenda

n = número de variáveis de decisão
 m = número de restrições
 N = conjunto das não básicas
 B = conjunto das básicas

EXPLICAÇÃO DAS ETAPAS DE UMA ITERAÇÃO DO MÉTODO SIMPLEX

Etapa	Ação	Explicação
1	Calcular $C_j - Z_j$	- Para cada coluna j (incluindo as folgas), calcule $C_j - Z_j$. Z_j é a contribuição da base atual para a coluna j.
2	Verificar se existe $C_j - Z_j > 0$	- Se todos os $C_j - Z_j \leq 0$, não há variável que possa aumentar Z. - A solução básica atual é ótima e o algoritmo termina.
3	Escolher variável que entra na base	Se existir $C_j - Z_j > 0$, escolha como variável que entra na base aquela com o maior valor positivo de $C_j - Z_j$.
4	Teste da razão mínima	- Na coluna da variável escolhida, calcule as razões $\frac{b_i}{a_{ij}}$ apenas para $a_{ij} > 0$. - Essa razão indica o quanto podemos aumentar a variável que entra na base sem violar as restrições.
5	Escolher variável que sai da base	- A variável que sai da base é a da linha com a menor razão positiva calculada. - O elemento na interseção dessa linha com a coluna escolhida é o <i>pivô</i>.
6	Realizar operação de pivô	- Divida a linha pivô pelo elemento pivô para torná-lo igual a 1. - Zere os demais elementos da coluna da variável que entrou na base, usando operações de linha.
7	Atualizar o quadro	- Atualize as linhas Z_j e $C_j - Z_j$ com os novos valores do quadro. - Retorne à etapa 1 para a próxima iteração.

PRÓXIMO PASSO – ESCOLHER A VARIÁVEL QUE ENTRA NA BASE

Usando o quadro inicial do exemplo: Produção de mesas (x_1) e cadeiras (x_2)

1. MODELO

Maximizar $Z = 50x_1 + 40x_2$

sujeito a $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 40 & (\text{madeira}) \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30 & (\text{trabalho}) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

2. QUADRO INICIAL DO SIMPLEX

Variáveis Básicas	C_B	Variáveis de decisão (não básicas)		Variáveis de folga (básicas)		b_i (termo indep.)
		x_1	x_2	f_1	f_2	
f_1	0	4	2	1	0	40
f_2	0	2	3	0	1	30
Z_j	0	0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$		50	40	0	0	0

3. REGRA DE ESCOLHA (MAXIMIZAÇÃO)

Na linha $C_j - Z_j$, escolha a coluna com o **maior valor positivo**.

Interpretação:

Esse valor indica o potencial de aumento de Z caso essa variável entre na base.

→ Maior valor positivo: **50** na coluna x_1 . Logo, x_1 é a **variável que entra na base**.



Intuição: Aumentar x_1 (mantendo as demais não básicas em zero) pode aumentar o lucro, pois seu coeficiente na função objetivo (50) ainda não está sendo “compensado” pela base atual (que dá $Z_j = 0$).

4. TESTE DA RAZÃO MÍNIMA (PARA DEFINIR QUEM SAI)

Considere apenas as linhas com coeficiente positivo na coluna de x_1 e calcule $\frac{b_i}{a_{i1}}$.

Linha	Variável básica	a_{i1} (coef. de x_1)	b_i (termo indep.)	$\frac{b_i}{a_{i1}}$
1	f_1	4	40	$\frac{40}{4} = 10$
2	f_2	2	30	$\frac{30}{2} = 15$

→ Razão mínima = 10 (linha 1). Logo, f_1 sai da base.

5. ELEMENTO PIVÔ

Elemento na interseção da linha que sai (linha 1) com a coluna que entra (x_1).

x_1	x_2	f_1	f_2	b_i
4	2	1	0	40
2	3	0	1	30

Elemento pivô = 4

6. O QUE ACONTECE EM SEGUIDA

- x_1 entra na base.
- f_1 sai da base.
- Realiza-se a operação de pivô:
 - Divide-se a linha 1 pelo pivô (= 4).
 - Zera-se os demais elementos da coluna x_1 nas outras linhas.
- Obtém-se um novo quadro do simplex, que representa uma nova solução básica (e possivelmente maior valor de Z).



Resumo do passo:

- Escolhemos a variável que entra na base (x_1) pela maior melhoria possível em Z .
- Teste da razão mínima indica qual variável sai (f_1).
- O pivô é 4. O próximo quadro será obtido realizando as operações de pivô.

PRÓXIMO QUADRO DO SIMPLEX (APÓS O 1º PIVÔ)

Exemplo: Produção de mesas (x_1) e cadeiras (x_2)

1. MODELO

Maximizar $Z = 50x_1 + 40x_2$

sujeito a $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 40 \text{ (madeira)} \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \text{ (trabalho)} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

O que o novo quadro representa

- x_1 está na base com valor 10.
- f_2 está na base com valor 10.
- x_2 e f_1 são não básicas e, portanto, valem 0.
- Valor atual da função objetivo: $Z = 500$.

2. MOVIMENTO REALIZADO

- Variável que entra na base:** x_1
(maior $C_j - Z_j = 50$ na coluna x_1)
- Variável que sai da base:** f_1
(razão mínima = 10 na linha 1)
- Elemento pivô** = 4
(interseção da linha 1 com coluna x_1)



3. NOVO QUADRO DO SIMPLEX

Variáveis Básicas	C_B	Variáveis de decisão (não básicas)		Variáveis de folga (não básicas/básica)		b_i (termo indep.)
		x_1	x_2	f_1	f_2	
x_1	50	1	1/2	1/4	0	10
f_2	0	0	2	-1/2	1	10
Z_j		50	25	12,5	0	500
$C_j - Z_j$		0	15	-12,5	0	0

4. INTERPRETAÇÃO DA NOVA SOLUÇÃO BÁSICA

Como as variáveis não básicas são $x_2 = 0$ e $f_1 = 0$, os valores das variáveis são:

$$\begin{aligned} x_1 &= 10 \\ x_2 &= 0 \\ f_1 &= 0 \\ f_2 &= 10 \end{aligned}$$

Valor da função objetivo:

$$Z = 50(10) + 40(0) = 500$$

5. VERIFICAÇÃO DA MELHORIA

A linha $C_j - Z_j$ indica o potencial de melhora.

Há valor positivo: **15** na coluna x_2 .

Logo, ainda podemos aumentar Z fazendo x_2 entrar na base.

6. PRÓXIMO PASSO (A SER REALIZADO)

Repetimos o procedimento:

- Escolher a variável que entra (maior $C_j - Z_j > 0$).
- Teste da razão mínima para escolher quem sai.
- Determinar o elemento pivô.
- Realizar a operação de pivô para obter o próximo quadro.



Resumo do 1º pivô

- ✓ x_1 entrou na base (maior $C_j - Z_j$).
- ✓ f_1 saiu da base (razão mínima).

- ✓ Elemento pivô = 4.
- ✓ Novo valor de $Z = 500$.
- ✓ Ainda há possibilidade de melhorar ($C_j - Z_j = 15$ na coluna x_2).

PRÓXIMO QUADRO DO SIMPLEX (APÓS O 2º PIVÔ)

Exemplo: Produção de mesas (x_1) e cadeiras (x_2)

1. MODELO

Maximizar $Z = 50x_1 + 40x_2$
sujeito a $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 40 \text{ (madeira)} \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \text{ (trabalho)} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

2. MOVIMENTO REALIZADO NO 1º PIVÔ

- Variável que entrou na base: x_1
- Variável que saiu da base: f_1
- Elemento pivô = 4 (linha 1, coluna x_1)

Solução básica após o 1º pivô:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 10 \\ x_2 = 0 \\ f_1 = 0 \\ f_2 = 10 \end{array} \right\} \text{Valor da função objetivo: } Z = 500$$

3. NOVO QUADRO DO SIMPLEX (APÓS O 2º PIVÔ)

Variáveis Básicas	C_B	Variáveis de decisão (não básicas)		Variáveis de folga (não básicas/básica)		b_i (termo indep.)
		x_1	x_2	f_1	f_2	
x_1	50	1	0	1/2	-1/6	5
x_2	40	0	1	-1/6	1/3	10
Z_j		50	40	20	0	900
$C_j - Z_j$		0	0	-20	0	0

4. COMO O 2º PIVÔ FOI OBTIDO

- 1 Variável que entra na base:
 x_2 (maior $C_j - Z_j > 0$,
na coluna x_2 : 15 no quadro anterior).
- 2 Teste da razão mínima
(na coluna x_2 do quadro anterior):
 - Linha 1: $5 \div (1/2) = 10$
 - Linha 2: $10 \div 2 = 5$Razão mínima = 5 (linha 2).
Logo, f_2 sai da base.
- 3 Elemento pivô = 2
(interseção da linha 2 com a coluna x_2 do quadro anterior).
- 4 Realizada a operação de pivô, obtém-se o novo quadro ao lado.

5. INTERPRETAÇÃO DA NOVA SOLUÇÃO BÁSICA

Como as variáveis não básicas são $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$, os valores das variáveis são:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 5 \\ x_2 = 10 \\ f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \end{array} \right\} \text{Valor da função objetivo: } Z = 50(5) + 40(10) = 900$$

➡ A produção ótima atual: 5 mesas e 10 cadeiras.

6. VERIFICAÇÃO DA MELHORIA

A linha $C_j - Z_j$ não possui valores positivos (0, 0, -20, 0).

✓ **Conclusão:** não há variável que possa entrar na base para aumentar Z .

Solução ótima encontrada!

7. SIGNIFICADO DA LINHA E COLUNAS

Linhas das variáveis básicas

➡ Agora a base é composta por x_1 e x_2 . Os valores à direita são os valores dessas variáveis na solução ótima.

C_B

➡ Coeficientes das variáveis básicas na função objetivo: $C_{x_1} = 50$ e $C_{x_2} = 40$.

Parte central

➡ Coeficientes das variáveis nas restrições após as operações de pivô.

Z_j e $C_j - Z_j$

➡ Informam que já não há possibilidade de melhorar Z (todos $C_j - Z_j \leq 0$).



Resumo do 2º pivô

- ✓ x_2 entrou na base.
- ✓ f_2 saiu da base.

- ✓ Elemento pivô = 2.
- ✓ Novo valor da função objetivo: $Z = 900$.

- ✓ Todos os $C_j - Z_j \leq 0$. Portanto, esta é a solução ótima do problema.

DUALIDADE NA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Para todo problema de Programação Linear (**Primal**), existe um problema associado (**Dual**) obtido pela troca de papéis entre variáveis e restrições.

PROBLEMA PRIMAL (P)

Forma padrão (maximização):

$$\max \quad Z = c^T x$$

$$\text{s. a.} \quad Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

- $x \in \mathbb{R}^n$: variáveis de decisão
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: matriz de coeficientes
- $b \in \mathbb{R}^m$: termos independentes
- $c \in \mathbb{R}^n$: coeficientes da função objetivo

TROCA DE PAPÉIS

Variáveis (x)	$\longleftrightarrow$	Restrições (y)
Função objetivo (c)	$\longleftrightarrow$	Termos independentes (b)
A	$\longleftrightarrow$	A^T
$\leq$	$\longleftrightarrow$	$\geq$
$\max$	$\longleftrightarrow$	$\min$
n variáveis	$\longleftrightarrow$	m restrições

PROBLEMA DUAL (D)

Forma padrão (minimização):

$$\min \quad W = b^T y$$

$$\text{s. a.} \quad A^T y \geq c$$

$$y \geq 0$$

- $y \in \mathbb{R}^m$: variáveis duais (preços-sombra)
- $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$: matriz transposta
- $c \in \mathbb{R}^n$: termos independentes do dual
- $b \in \mathbb{R}^m$: coeficientes da função objetivo do dual

PROPRIEDADES IMPORTANTES



- Se x é viável para o primal e y é viável para o dual, então $Z \leq W$ (dual fornece um limite superior para o primal em problemas de maximização).
- Se x^* e y^* são soluções ótimas, então $Z^* = W^*$.

INTERPRETAÇÃO

As variáveis duais y representam o “valor” de relaxar cada restrição do problema primal em uma unidade (preços-sombra), indicando quanto isso pode melhorar o valor da função objetivo.



A dualidade é uma ferramenta poderosa para análise econômica, interpretação de resultados e obtenção de limites para a solução ótima.

Exemplo 6

Uma empresa fabrica dois produtos, **A** e **B**. Cada unidade produzida gera os seguintes resultados:

Produto	Resultado por unidade	Horas de produção
A	R\$ 40	2 h
B	R\$ 30	1 h

A empresa dispõe de, no máximo, **20 horas de produção**.

Por compromisso contratual, a produção total dos dois produtos deve ser de **pelo menos 8 unidades**.

Determine as quantidades a produzir de cada produto para **maximizar o resultado total**.

MODELO ORIGINAL

$$\max \quad Z = 40x_1 + 30x_2$$

s.a.

$$2x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



MODELO COM IGUALDADES

$$\max \quad Z = 40x_1 + 30x_2$$

$$2x_1 + x_2 + f_1 = 20$$

$$x_1 + x_2 - e_2 = 8$$

$$x_1, x_2, f_1, e_2 \geq 0$$

QUADRO INICIAL (TABLEAU INICIAL)

Base	C_B	Variáveis				Termo independente (b)	Razão ($b / a_{i,p}$)
		x_1	x_2	f_1	e_2		
f_1	0	2	1	1	0	20	—
e_2	0	1	1	0	-1	8	—
C_j		40	30	0	0		
Z_j		0	0	0	0	$Z = 0$	

Variáveis básicas iniciais: f_1, e_2 | Variáveis não básicas: x_1, x_2

MÉTODO SIMPLEX – 1ª ITERAÇÃO

1

IDENTIFICAÇÃO DO PIVÔ

Coluna pivô (entra):

Maior $C_j - Z_j$ positivo $\rightarrow x_1$ (40)

Linha pivô (sai):

Teste da razão $b / a_{i,p}$ na coluna x_1 (apenas $a_{i,p} > 0$)

Linha	$a_{i,p}$ (coluna x_1)	b_i	$b_i / a_{i,p}$
f_1	2	20	10
e_2	1	8	8

Pivô: $a_{2,1} = 1$ (linha e_2 , coluna x_1)

2

CONVERSÃO DAS LINHAS

1) Linha pivô (divide pelo pivô = 1):

$$L_2 \leftarrow L_2 / 1$$

2) Zera os demais elementos da coluna pivô:

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2 \cdot L_2$$

$$L_Z \leftarrow L_Z - 40 \cdot L_2$$

(L_2 : nova linha da base com $x_1 = 1$)

3

QUADRO APÓS A 1ª ITERAÇÃO

Base	C_B	Variáveis				Termo independente (b)	Razão ($b / a_{i,p}$)
		x_1	x_2	f_1	e_2		
f_1	0	0	-1	1	2	4	—
x_1	40	1	1	0	-1	8	—
C_j		40	30	0	0		
Z_j		40	40	0	-40	320	
$C_j - Z_j$		0	-10	0	40		

QUADRO INICIAL (PARA REFERÊNCIA)

Base	C_B	Variáveis				Termo independente (b)	Razão ($b / a_{i,p}$)
		x_1	x_2	f_1	e_2		
f_1	0	2	1	1	0	20	10
e_2	0	1	1	0	-1	8	8
C_j		40	30	0	0		
Z_j		0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$		40	30	0	0		

QUADRO APÓS A 1ª ITERAÇÃO

Base	C_B	Variáveis				Termo independente (b)	Razão ($b / a_{i,p}$)
		x_1	x_2	f_1	e_2		
f_1	0	0	-1	1	2	4	—
x_1	40	1	1	0	-1	8	—
C_j		40	30	0	0		
Z_j		40	40	0	-40	320	
$C_j - Z_j$		0	-10	0	40		



Interpretação: x_1 entrou na base e e_2 saiu. O valor da função objetivo melhorou de $Z = 0$ para $Z = 320$.

MÉTODO SIMPLEX – 2ª ITERAÇÃO

1

IDENTIFICAÇÃO DO PIVÔ

Coluna pivô (entra):

Maior $C_j - Z_j$ positivo $\rightarrow e_2$ (40)

Linha pivô (saí):

Teste da razão $b_i / a_{i,p}$ na coluna e_2
(apenas $a_{i,p} > 0$)



Linha	$a_{i,p}$ (coluna e_2)	b_i	$b_i / a_{i,p}$
f_1	2	4	2
x_1	-1	8	—

Pivô: $a_{1,4} = 2$ (linha f_1 , coluna e_2)

2

CONVERSÃO DAS LINHAS

1) Linha pivô (divide pelo pivô = 2):

$$L_1 \leftarrow L_1 / 2$$

2) Zera os demais elementos da coluna pivô:

$$L_2 \leftarrow L_2 + 1 \cdot L_1$$

(L_1 : nova linha da base com $e_2 = 1$)

3

QUADRO APÓS A 2ª ITERAÇÃO

Base	C_B	Variáveis				Termo independente (b)	Razão ($b / a_{i,p}$)
		x_1	x_2	f_1	e_2		
e_2	0	0	-1/2	1/2	1	2	—
x_1	40	1	1/2	1/2	0	10	—
C_j		40	30	0	0		
Z_j		40	20	20	0	400	
$C_j - Z_j$		0	10	-20	0		

QUADRO APÓS A 1ª ITERAÇÃO (PARA REFERÊNCIA)

Base	C_B	Variáveis				Termo independente (b)	Razão ($b / a_{i,p}$)
		x_1	x_2	f_1	e_2		
f_1	0	0	-1	1	2	4	2
x_1	40	1	1	0	-1	8	—
C_j		40	30	0	0		
Z_j		40	40	0	-40	320	
$C_j - Z_j$		0	-10	0	40		

QUADRO APÓS A 2ª ITERAÇÃO

Base	C_B	Variáveis				Termo independente (b)	Razão ($b / a_{i,p}$)
		x_1	x_2	f_1	e_2		
e_2	0	0	-1/2	1/2	1	2	—
x_1	40	1	1/2	1/2	0	10	—
C_j		40	30	0	0		
Z_j		40	20	20	0	400	
$C_j - Z_j$		0	10	-20	0		



Interpretação:

e_2 entrou na base e f_1 saiu. O valor da função objetivo melhorou de $Z = 320$ para $Z = 400$. Ainda existe $C_j - Z_j > 0$ (coluna x_2) $\Rightarrow$ pros siga para a próxima iteração.

MÉTODO SIMPLEX – 3ª ITERAÇÃO

1

IDENTIFICAÇÃO DO PIVÔ

Coluna pivô (entra):

Maior $C_j - Z_j$ positivo $\rightarrow x_2$ (10)

Linha pivô (sai):

Teste da razão $b_i / a_{i,p}$ na coluna x_2
(apenas $a_{i,p} > 0$)

Linha	$a_{i,p}$ (coluna x_2)	b_i	$b_i / a_{i,p}$
e_2	-1/2	2	—
x_1	1/2	10	20

Pivô: $a_{2,2} = \frac{1}{2}$ (linha x_1 , coluna x_2)

2

CONVERSÃO DAS LINHAS

1) Linha pivô (divide pelo pivô = 1/2):

$$L_2 \leftarrow L_2 / (1/2) = 2 \cdot L_2$$

2) Zera os demais elementos da coluna pivô:

$$L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2} \cdot L_2$$

(L_2 : nova linha da base com $x_2 = 1$)

3

QUADRO APÓS A 3ª ITERAÇÃO

Base	C_B	Variáveis				Termo independente (b)	Razão ($b / a_{i,p}$)
		x_1	x_2	f_1	e_2		
e_2	0	1	0	1	1	22	—
x_2	30	2	1	1	0	20	—
C_j		40	30	0	0		
Z_j		60	30	30	0	600	
$C_j - Z_j$		-20	0	-30	0		

QUADRO APÓS A 2ª ITERAÇÃO (PARA REFERÊNCIA)

Base	C_B	Variáveis				Termo independente (b)	Razão ($b / a_{i,p}$)
		x_1	x_2	f_1	e_2		
e_2	0	0	-1/2	1/2	1	2	—
x_1	40	1	1/2	1/2	0	10	—
C_j		40	30	0	0		
Z_j		40	20	20	0	400	
$C_j - Z_j$		0	10	-20	0		

QUADRO APÓS A 3ª ITERAÇÃO

Base	C_B	Variáveis				Termo independente (b)	Razão ($b / a_{i,p}$)
		x_1	x_2	f_1	e_2		
e_2	0	1	0	1	1	22	—
x_2	30	2	1	1	0	20	—
C_j		40	30	0	0		
Z_j		60	30	30	0	600	
$C_j - Z_j$		-20	0	-30	0		



Interpretação: x_2 entrou na base e x_1 saiu. O valor da função objetivo melhorou para $Z = 600$.
Como $C_j - Z_j \leq 0$ para todas as variáveis, esta é a solução ótima.

Solução ótima:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 20, \quad Z_{\max} = 600$$