

Cap 2

Modelo matemático para Programação Linear

Prof MS Clayton J A Silva



PROGRAMAÇÃO LINEAR: PROBLEMAS DE ALOCAÇÃO DE RECURSOS



Problemas de alocação de recursos tratam da melhor forma de distribuir recursos limitados entre alternativas de uso ou atividades, visando **otimizar um objetivo**.



O QUE É?

São situações em que precisamos decidir quanto de cada atividade ou destino executar, de modo a obter o melhor resultado possível, respeitando as disponibilidades dos recursos.



CARACTERÍSTICAS

- Recursos são limitados (mão de obra, tempo, orçamento, capacidade, matéria-prima etc.).
- As decisões envolvem quanto alocar a cada atividade ou destino.
- As relações entre objetivo e restrições são lineares.
- Garante a melhor utilização possível dos recursos disponíveis.



QUANDO É UTILIZADO?

Quando existe um conjunto de alternativas que consomem recursos e um objetivo claro (maximizar benefício ou minimizar custo), dentro de restrições de disponibilidade.



EXEMPLOS DE APLICAÇÃO



Produção
e mistura



Distribuição
e transporte



Alocação de
pessoas/equipes



Alocação de
orçamento



Alocação de leitos,
equipamentos
ou serviços



Esses problemas ajudam a tomar decisões ótimas, garantindo o melhor resultado possível com os recursos disponíveis.



PROGRAMAÇÃO LINEAR: PROBLEMAS DE ALOCAÇÃO DE RECURSOS

EXEMPLO 1

PRODUÇÃO DE MESAS E CADEIRAS



Cada **mesa** requer **4 unidades** de madeira e **2 horas** de trabalho.



Cada **cadeira** requer **2 unidades** de madeira e **3 horas** de trabalho.



A fábrica dispõe, a cada semana, de **40 unidades** de madeira e **30 horas** de trabalho.



A venda de cada mesa proporciona um lucro de **R\$ 50,00**, enquanto cada cadeira proporciona um lucro de **R\$ 40,00**.



Determine quantas **mesas** e **cadeiras** a fábrica deve produzir por semana para **maximizar seu lucro**, respeitando a disponibilidade de madeira e de horas de trabalho.



Esses problemas ajudam a tomar decisões ótimas, garantindo o melhor resultado possível com os recursos disponíveis.



PROGRAMAÇÃO LINEAR: PROBLEMAS DE ALOCAÇÃO DE RECURSOS

EXEMPLO 1

PRODUÇÃO DE MESAS E CADEIRAS



Determine quantas **mesas** e **cadeiras** a fábrica deve produzir por semana para **maximizar seu lucro**, respeitando a disponibilidade de madeira e de horas de trabalho.

1. AS VARIÁVEIS DE DECISÃO

As quantidades (unidades por semana) de cada tipo de produto que a fábrica deve produzir.

x_1 : mesas

x_2 : cadeiras



PROGRAMAÇÃO LINEAR: PROBLEMAS DE ALOCAÇÃO DE RECURSOS

EXEMPLO 1

PRODUÇÃO DE MESAS E CADEIRAS



Determine quantas **mesas** e **cadeiras** a fábrica deve produzir por semana para **maximizar seu lucro**, respeitando a disponibilidade de madeira e de horas de trabalho.

1. AS VARIÁVEIS DE DECISÃO

As quantidades (unidades por semana) de cada tipo de produto que a fábrica deve produzir.

x_1 : mesas

x_2 : cadeiras

2. RELACIONADA COM O OBJETIVO: FUNÇÃO OBJETIVO

Expressa o objetivo de maximizar o lucro total obtido com a produção.

Maximizar $Z = 50x_1 + 40x_2$

onde:

R\$ 50,00 é o lucro por mesa

R\$ 40,00 é o lucro por cadeira



PROGRAMAÇÃO LINEAR: PROBLEMAS DE ALOCAÇÃO DE RECURSOS

EXEMPLO 1

PRODUÇÃO DE MESAS E CADEIRAS



Determine quantas **mesas** e **cadeiras** a fábrica deve produzir por semana para **maximizar seu lucro**, respeitando a disponibilidade de madeira e de horas de trabalho.

1. AS VARIÁVEIS DE DECISÃO

As quantidades (unidades por semana) de cada tipo de produto que a fábrica deve produzir.

x_1 : mesas

x_2 : cadeiras

2. RELACIONADA COM O OBJETIVO: FUNÇÃO OBJETIVO

Expressa o objetivo de maximizar o lucro total obtido com a produção.

Maximizar $Z = 50x_1 + 40x_2$

onde:

R\$ 50,00 é o lucro por mesa

R\$ 40,00 é o lucro por cadeira

3. QUE DEFINEM AS LIMITAÇÕES: RESTRIÇÕES

Expressam as limitações de recursos disponíveis na fábrica.

Madeira: $4x_1 + 2x_2 \leq 40$ (unidades)

Horas de trabalho:
 $2x_1 + 3x_2 \leq 30$ (horas)

Não negatividade:
 $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$



PROGRAMAÇÃO LINEAR – PROBLEMAS DE ALOCAÇÃO DE RECURSOS

EXEMPLO 1 – PRODUÇÃO DE MESAS E CADEIRAS

	A	B	C	D	E	F
2						
3	Dados do problema					
4	Produto	Lucro/unit. (R\$)	Madeira/unit.	Horas/unit.	Variável	Quantidade
5	Mesa	50	4	2	x_1	6
6	Cadeira	40	2	3	x_2	6
7						
8	Disponibilidades		40	30		
9						
10	Função objetivo (Z): lucro total				R\$ 540,00	
11						
12						
13	Restrições					
14	Restrição	Uso calculado	Sinal	Disponível	Folga	
15	Madeira	36	$\leq$	40	4	
16	Horas de trabalho	30	$\leq$	30	0	
17						
18	<i>Não negatividade: $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$</i>					

$=B5 \cdot F5 + B6 \cdot F6$

$=C5 \cdot F5 + C6 \cdot F6$
 $=D5 \cdot F5 + D6 \cdot F6$

$=D15 - B15$
 $=D16 - B16$

ANÁLISE GRÁFICA DA RESTRIÇÃO DE MADEIRA



A quantidade total de madeira utilizada na produção de mesas e cadeiras **não pode exceder** a disponibilidade semanal de **40 unidades**.



1. VARIÁVEIS DE DECISÃO

x_1 = número de mesas a produzir
 x_2 = número de cadeiras a produzir



2. DADOS DO PROBLEMA

Consumo de madeira por unidade produzida

- Mesa (x_1): 4 unidades de madeira
- Cadeira (x_2): 2 unidades de madeira

Madeira disponível por semana:
40 unidades



3. RESTRIÇÃO DE MADEIRA

A madeira total utilizada é dada por:
(4 unidades por mesa) + (2 unidades por cadeira)



$$4x_1 + 2x_2 \leq 40 \quad (\text{Restrição de madeira})$$



Todas as combinações (x_1 , x_2) que satisfazem essa desigualdade pertencem à **região viável** definida pela quantidade de madeira.

4. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

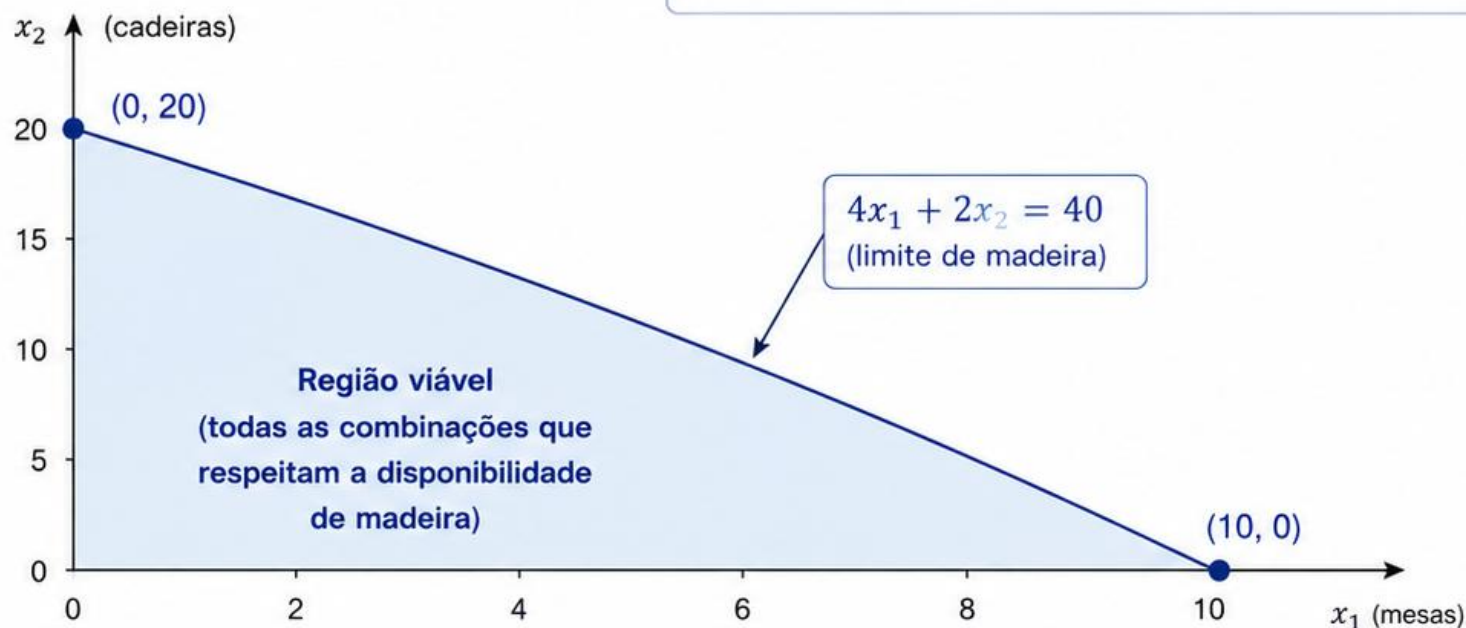
A desigualdade $4x_1 + 2x_2 \leq 40$ define um semiplano (região abaixo da reta).

Reta associada (limite de madeira):

$$4x_1 + 2x_2 = 40$$

Interceptos da reta:

- Se $x_2 = 0 \Rightarrow 4x_1 = 40 \Rightarrow x_1 = 10 \Rightarrow (10, 0)$
- Se $x_1 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 40 \Rightarrow x_2 = 20 \Rightarrow (0, 20)$



Conclusão:

Qualquer combinações (x_1 , x_2) na região azul utiliza no máximo 40 unidades de madeira por semana. Essa é apenas uma das restrições do problema; a região viável final será a interseção com as demais restrições.

ANÁLISE GRÁFICA

Modelo do Problema

Variáveis de decisão:

x_1 = quantidade de mesas

x_2 = quantidade de cadeiras

Função objetivo:

Maximizar $Z = 50x_1 + 40x_2$

Restrições:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 40 \quad (\text{madeira})$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 30 \quad (\text{trabalho})$$

Não negatividade:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

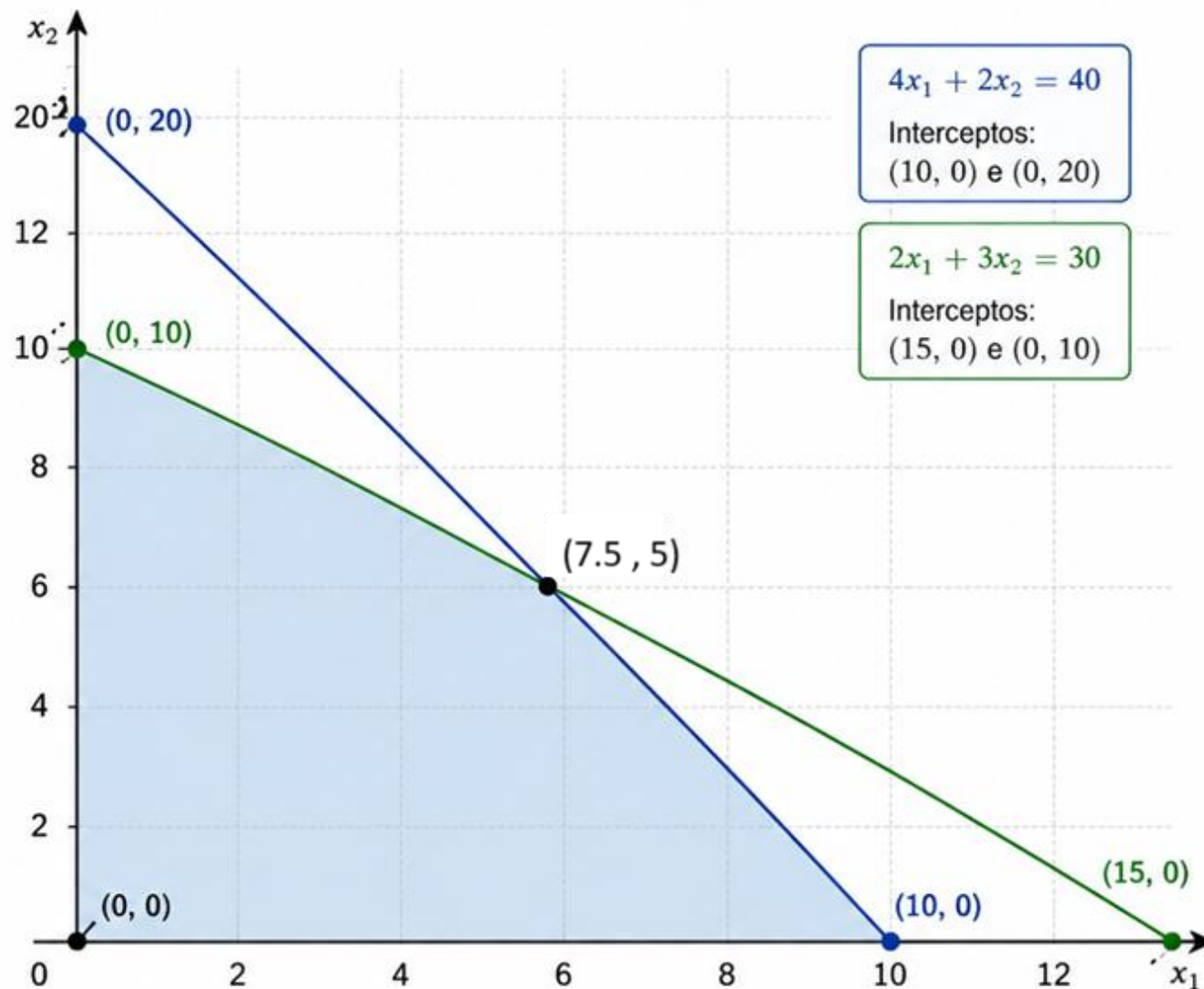
Legenda

— Reta $4x_1 + 2x_2 = 40$ (madeira)

— Reta $2x_1 + 3x_2 = 30$ (trabalho)

Região viável

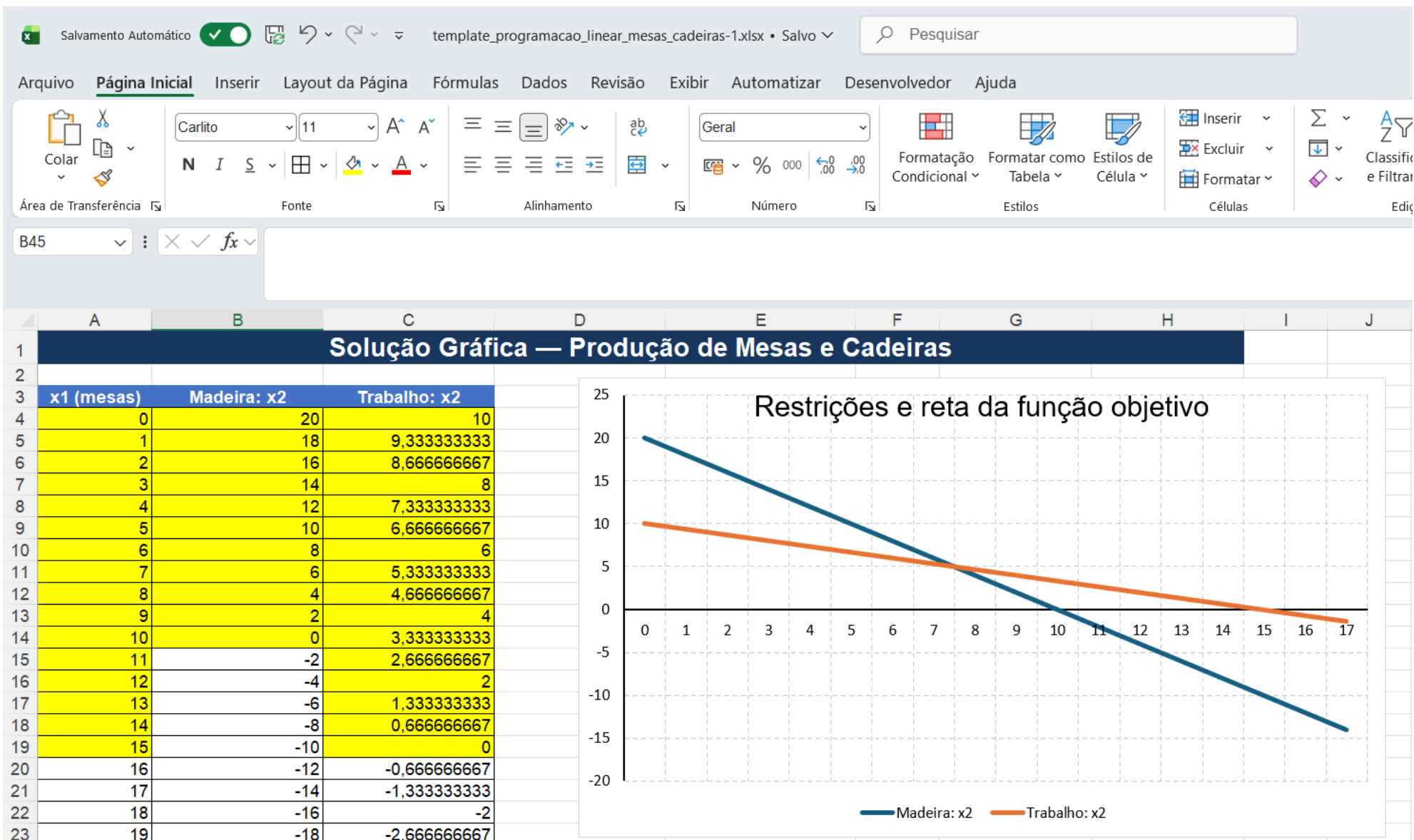
Produção de Mesas e Cadeiras



A região sombreada representa todas as combinações possíveis de mesas (x_1) e cadeiras (x_2) que respeitam a disponibilidade de madeira e de horas de trabalho.

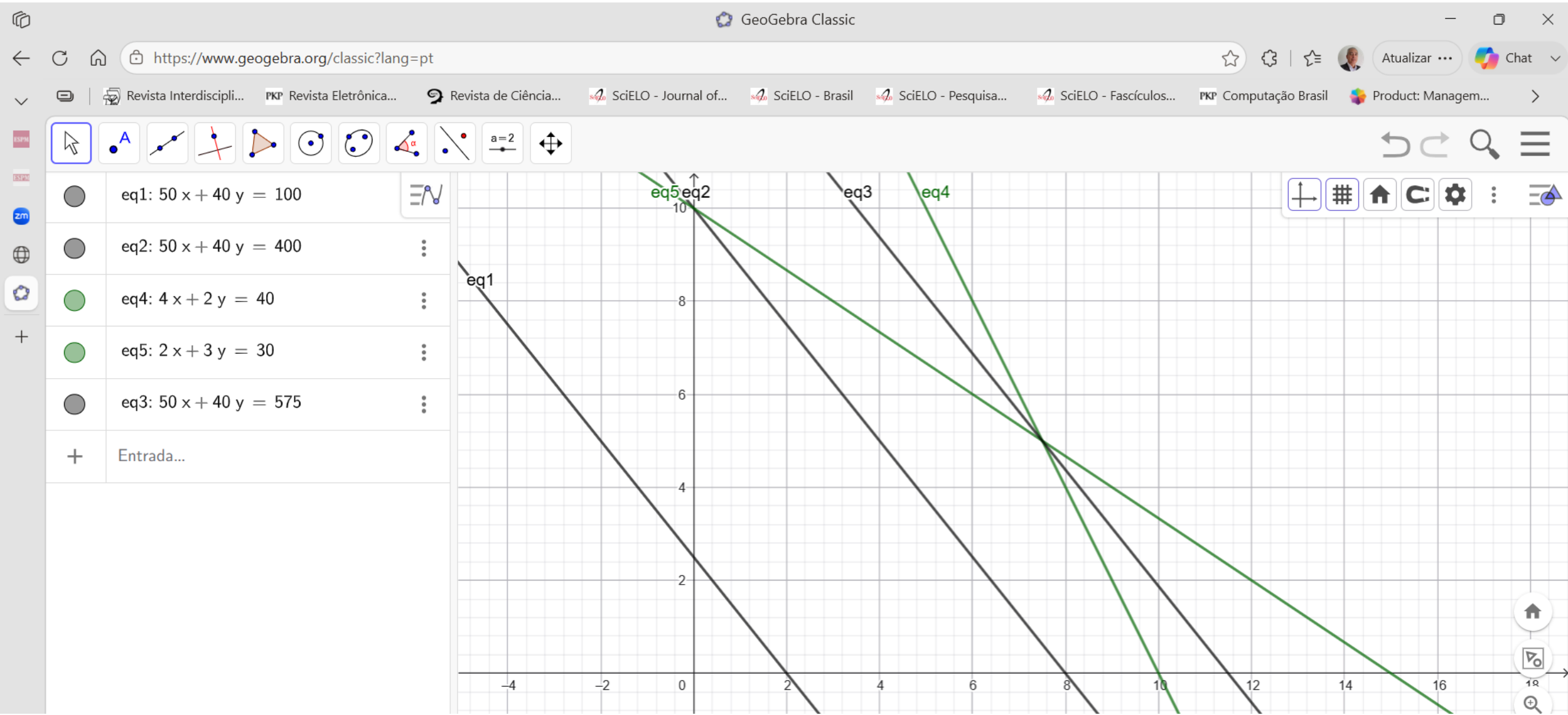
ANÁLISE GRÁFICA

Excel



ANÁLISE GRÁFICA Geogebra

As retas de lucro total – lucro máximo





PROGRAMAÇÃO LINEAR: PROBLEMAS DE ALOCAÇÃO DE RECURSOS

EXEMPLO 2

PRODUÇÃO DE SUCOS NATURAIS



Cada **suco de laranja** requer **3 laranjas** e **2 minutos** de preparo.



Cada **suco de abacaxi** requer **2 fatias de abacaxi** e **3 minutos** de preparo.



O quiosque dispõe, por dia, de **30 laranjas/fatias equivalentes** e **30 minutos** para preparo.



A venda de cada **suco de laranja** gera lucro de **R\$ 8,00**, enquanto cada **suco de abacaxi** gera lucro de **R\$ 6,00**.



Determine quantos **sucos de laranja** e **sucos de abacaxi** devem ser produzidos por dia para **maximizar o lucro**, respeitando a disponibilidade de frutas e o tempo de preparo.



Esses problemas ajudam a tomar decisões ótimas, garantindo o melhor resultado possível com os recursos disponíveis.

Problemas de alocação de recursos

exemplo 3

- **Problema de Mistura — Produção de Gasolina**

Uma refinaria produz três tipos de gasolina: **verde, azul e comum**. Para a produção dessas gasolinas são utilizados três componentes: **gasolina pura, octana e aditivo**. A refinaria dispõe semanalmente de **9.600.000 litros de gasolina pura, 4.800.000 litros de octana e 2.200.000 litros de aditivo**.

Cada litro de **gasolina verde** requer **0,22 litro de gasolina pura, 0,50 litro de octana e 0,28 litro de aditivo**. Cada litro de **gasolina azul** requer **0,52 litro de gasolina pura, 0,34 litro de octana e 0,14 litro de aditivo**. Já cada litro de **gasolina comum** requer **0,74 litro de gasolina pura, 0,20 litro de octana e 0,06 litro de aditivo**.

Com base na demanda de mercado, a refinaria estabeleceu ainda duas condições para seu programa de produção: a quantidade produzida de **gasolina comum deve ser, no mínimo, 16 vezes a quantidade de gasolina verde**, enquanto a produção de **gasolina azul não pode ultrapassar 600.000 litros por semana**.

A margem de contribuição para o lucro obtida pela refinaria é de **\$ 0,30 por litro de gasolina verde, \$ 0,25 por litro de gasolina azul e \$ 0,20 por litro de gasolina comum**.

Determine o **programa semanal de produção da refinaria**, isto é, as quantidades de gasolina verde, azul e comum que devem ser produzidas, de modo a **maximizar a margem total de contribuição para o lucro**, respeitando a disponibilidade dos componentes e as condições estabelecidas para a produção.

Problemas de alocação de recursos

exemplo 4

- **Problema de Mistura — Produção de Cimento**

Uma indústria de cimento fabrica dois produtos: o **cimento Portland 320 (CP320)** e o **cimento alto-forno 250 (AF250)**. A fabricação desses produtos utiliza quatro componentes: **clínquer**, **escória de alto-forno**, **gesso** e **aditivo**.

Para produzir uma tonelada de **CP320**, são necessários **85%** de **clínquer**, **7%** de **escória de alto-forno**, **3%** de **gesso** e **5%** de **aditivo**. Para produzir uma tonelada de **AF250**, são necessários **50%** de **clínquer**, **45%** de **escória de alto-forno**, **3%** de **gesso** e **2%** de **aditivo**.

A capacidade anual de produção de **clínquer** é limitada a **1.100.000** toneladas, em razão da capacidade do forno. A capacidade do moinho também limita a **produção conjunta** de **CP320** e **AF250** a **1.100.000** toneladas por ano.

Além de utilizar o **clínquer** na fabricação dos dois tipos de cimento, a empresa pode vendê-lo para outros fabricantes, sendo essa venda limitada a **200.000** toneladas por ano. A **escória de alto-forno** é adquirida de usinas siderúrgicas e sua compra está limitada a **180.000** toneladas por ano. As compras de **gesso** e de **aditivo** estão limitadas, cada uma, a **50.000** toneladas por ano.

A empresa obtém uma contribuição marginal de **\$ 41,00** por tonelada de **CP320**, **\$ 37,80** por tonelada de **AF250** e **\$ 34,40** por tonelada de **clínquer** vendido. Para a produção dos cimentos, devem ainda ser considerados os custos dos componentes adquiridos: **\$ 22,10** por tonelada de **escória de alto-forno**, **\$ 34,20** por tonelada de **gesso** e **\$ 1,90** por tonelada de **aditivo**. As contribuições marginais informadas foram calculadas a partir da **receita líquida menos os custos fixos e os custos variáveis**, excetuando-se os custos da escória, do gesso e do aditivo, que, portanto, devem ser considerados separadamente na determinação do resultado.

Determine o programa anual de produção, estabelecendo as quantidades de **CP320** e **AF250** a serem fabricadas e de **clínquer** a ser vendido, de modo a maximizar o lucro total da empresa, respeitando as capacidades produtivas, as disponibilidades dos componentes e as demais limitações estabelecidas.